DEPARTAMENTO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL

FACULTAD DE INFORMÁTICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

TESIS DOCTORAL

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE DOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA LÓGICA FUZZY

Autor: Adolfo Rodríguez de Soto

Director: Dr. Enric Trillas

Madrid, Julio 1995

A mis padres

A Covi y a Jorge

Deseo expresar mi agradecimiento en primer lugar, al profesor Enric Trillas, por haber aceptado la dirección de esta memoria y por todo lo que, gracias a él, he aprendido durante estos años sobre Lógica, Matemáticas y otras cosas;

a la profesora Susana Cubillo, por su disposición siempre cordial y ayuda inestimable con la que siempre he contado;

a los profesores Claudi Alsina, Sergei Ovchinnikov y Janos Aczél, por sus interesantes comentarios y sugerencias que han permitido mejorar algunas partes de ésta memoria;

a los compañeros de la Universidad de León Rodrigo González, Enrique López y Cristina Mendaña, que me han acompañado y apoyado en los momentos más difíciles;

y por último a los amigos de Madrid, y especialmente a Mini, por su amistad y por las múltiples ocasiones en que me han ofrecido la logística necesaria para que pudiese realizar esta memoria.

El hombre es por natura la bestia paradójica,
un animal absurdo que necesita lógica.
Creó de la nada un mundo y, su obra terminada,
"Ya estoy en el secreto —se dijo—, todo es nada"

ANTONIO MACHADO, CXXXVI,
"Proverbios y cantares", XVI.

RESUMEN

La tesis doctoral CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE DOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA LÓGICA FUZZY constituye un conjunto de nuevas aportaciones al análisis de dos elementos básicos de la lógica fuzzy: los mecanismos de inferencia y la representación de predicados vagos. La memoria se encuentra dividida en dos partes que corresponden a los dos aspectos señalados.

En la Parte I se estudia el concepto básico de «estado lógico borroso». Un estado lógico borroso es un punto fijo de la aplicación generada a partir de la regla de inferencia conocida como *modus ponens generalizado.* Además, un preorden borroso puede ser representado mediante los preórdenes elementales generados por el conjunto de sus estados lógicos borrosos. El Capítulo 1 está dedicado a caracterizar cuándo dos estados lógicos dan lugar al mismo preorden elemental, obteniéndose también un representante de la clase de todos los estados lógicos que generan el mismo preorden elemental. El Capítulo finaliza con la caracterización del conjunto de estados lógicos borrosos de un preorden elemental. En el Capítulo 2 se obtiene un subconjunto borroso trapezoidal como una clase de una relación de indistinguibilidad. Finalmente, el Capítulo 3 se dedica a estudiar dos tipos de estados lógicos clásicos: los irreducibles y los minimales.

En el Capítulo 4, que inicia la Parte II de la memoria, se aborda el problema de obtener la función de compatibilidad de un predicado vago. Se propone un método, basado en el conocimiento del uso del predicado mediante un conjunto de reglas y de ciertos elementos distinguidos, que permite obtener una expresión general de la función de pertenencia generalizada de un subconjunto borroso que realice la función de extensión del predicado borroso. Dicho método permite, en ciertos casos, definir un conjunto de conectivas multivaluadas asociadas al predicado. En el último capítulo se estudia la representación de antónimos y sinónimos en lógica fuzzy a través de automorfismos. Se caracterizan los automorfismos sobre el intervalo unidad cuando sobre él se consideran dos operaciones: una t-norma y una t-conorma ambas arquimedianas.

ABSTRACT

The PhD Thesis CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE DOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA LÓGICA FUZZY is a contribution to two basic concepts of the Fuzzy Logic. It is divided in two parts, the first is devoted to a mechanism of inference in Fuzzy Logic, and the second to the representation of vague predicates.

«Fuzzy Logic State» is the basic concept in Part I. A Fuzzy Logic State is a fixed-point for the mapping giving the *Generalized Modus Ponens* Rule of inference. Moreover, a fuzzy preordering can be represented by the elementary preorderings generated by its Fuzzy Logic States. Chapter 1 contemplates the identity of elementary preorderings and the selection of representatives for the classes modulo this identity. This chapter finishes with the characterization of the set of Fuzzy Logic States of an elementary preordering. In Chapter 2 a Trapezoidal Fuzzy Set as a class of a relation of Indistinguishability is obtained. Finally, Chapter 3 is devoted to study two types of Classical Logic States: irreducible and minimal.

Part II begins with Chapter 4 dealing with the problem of obtaining a Compatibility Function for a vague predicate. When the use of a predicate is known by means of a set of rules and some distinguished elements, a method to obtain the general expression of the Membership Function is presented. This method allows, in some cases, to reach a set of multivalued connectives associated to the predicate. Last Chapter is devoted to the representation of antonyms and synonyms in Fuzzy Logic. When the unit interval $[0,1]$ is endowed with both an archimedean t-norm and a an archimedean t-conorm, it is showed that the automorphisms' group is just reduced to the identity function.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Desde sus inicios, la Informática ha mostrado una estrecha relación con la Lógica. Son muchos los ejemplos que podríamos citar y que evidenciarían esta relación; así la lógica booleana jugó un papel esencial en la construcción, tanto física como teórica, de las computadoras, también las lógicas modales y temporales se utilizan en la verificación de programas, así como la lógica de predicados da lugar a lenguajes de consulta de base de datos, etc. Es, pues, importante el uso que las Ciencias de la Computación han hecho de la Lógica a lo largo de su evolución. Pero también se ha producido una influencia a la inversa, las Ciencias de la Computación han propiciado el desarrollo de sistemas lógicos. El mismo ejemplo de las lógicas temporales, o actualmente la aparición de todo un mundo de lógicas no monótonas, son buena muestra de ello.

La relación entre Inteligencia Artificial y Lógica se pone de manifiesto por un problema común: la formalización de los procesos de razonamiento humanos. Y, si bien sus objetivos son claramente distintos, por el fin práctico de la primera y el carácter epistemológico de la segunda, es evidente su influencia mutua. Quizá sea la lógica de predicados de primer orden el ejemplo más claro de los éxitos obtenidos gracias a esta colaboración. El principio de resolución de ROBINSON constituyó el puente entre la lógica de predicados y el lenguaje de programación Prolog.

La Lógica Matemática puede ser una valiosa ayuda para construir modelos en Inteligencia Artificial, fundamentalmente por la posibilidad que ofrece de definir correctamente la sintaxis y semántica de los diversos sistemas lógicos, permitiendo, de esta forma, clarificar tanto sus posibilidades como sus carencias. Por su parte, la Inteligencia Artificial puede abrir nuevos caminos a la Lógica, o también obligar a reandar otros.

La lógica fuzzy constituye un ejemplo más de la interrelación descrita. En ella se presentan dos aspectos que pueden interesar tanto a lógicos como a informáticos: la formalización, mediante un modelo matemático, del uso de conceptos vagos o borrosos —la vaguedad es un fenómeno intrínseco al lenguaje natural y ya fue estudiado por filósofos-lógicos como Aristóteles, Russell o Wittgestein— y las aplicaciones en campos como el control automático de sistemas, o en sistemas expertos —aplicaciones que surgen de la teoría de subconjuntos borrosos expuesta en el artículo «Fuzzy Sets» [93] del profesor L. A. ZADEH, y que constituye la base de la lógica fuzzy.

La lógica fuzzy debe ser incluida, por lo que respecta a la Inteligencia Artificial, en un conjunto de técnicas y modelos que pretenden formalizar lo que se conoce como razonamiento aproximado. Por este término entendemos el conjunto de procesos de razonamiento que el hombre aplica cuando se enfrenta a problemas que se caracterizan por estar mal definidos, y con una información disponible inexacta, incierta, vaga y/o incompleta.

No es la lógica borrosa el único sistema lógico que ha surgido para tratar este tipo de problemas, paralelamente han aparecido la lógica probabilística [42], la lógica del razonamiento plausible [48], la teoría de la evidencia propuesta por DEMPSTER y SHAFER [37], etc. Pero casi todos estos modelos están orientados a gestionar la aparición de incertidumbre en la información o la falta de información. Es la lógica fuzzy el primer intento formal de tratar la vaguedad.

En la presente memoria se abordan algunos aspectos de dos conceptos fundamentales de la lógica fuzzy: los mecanismos de inferencia y la representación de términos o predicados vagos. La memoria se encuentra estructurada en dos partes que corresponden a los dos conceptos mencionados.

La primera parte se centra en una regla de inferencia básica como es el *modus ponens* y en su versión para la lógica fuzzy denominada *modus ponens generalizado*, mecanismo de inferencia que proviene de la regla composicional de inferencia propuesta por L. A. ZADEH [97]. En concreto, se estudian los estados lógicos borrosos, que son puntos fijos de la regla para una relación borrosa.

Sobre la representación de predicados vagos que se aborda en la segunda parte se estudia un mecanismo para la obtención de la función de compatibilidad de un predicado borroso, junto con algunos métodos para asociar un conjunto de conectivas lógicas a dicho predicado. En lógica fuzzy es habitual utilizar variables lingüísticas caracterizadas por tomar valores en un conjunto de expresiones lingüísticas. El conjunto de valores puede ser construido en muchas ocasiones a partir de un término lingüístico, de su antónimo y de operaciones entre ambos, como pueden ser conjunciones, disyunciones o aplicación de cercas o modificadores lingüísticos. Por consiguiente dedicamos un capítulo a la representación de antónimos y sinónimos en lógica fuzzy.

Verdad e inferencia

Cualquier sistema lógico debe ofrecer mecanismos que permitan propagar el conocimiento representado en el mismo. Esta propagación se realiza mediante reglas de inferencia del sistema, que deben permitir pasar de proposiciones verdaderas a proposiciones verdaderas, realizando con ello deducciones correctas. Así, dos elementos son básicos en cualquier proceso de deducción: el conjunto de proposiciones verdaderas y las reglas de inferencia. Como es sabido, los trabajos de TARSKI y LINDENBAUM dieron lugar a un método algebraico para la lógica proposicional, al tratar las fórmulas, o las clases de equivalencia de fórmulas, como elementos de un álgebra abstracta. Un lenguaje lógico proposicional clásico puede ser representado mediante un álgebra de Boole E. Si designamos por $\top$ la clase de equivalencia de todas las proposiciones verdaderas, la regla del *modus ponens* muestra un proceso básico de inferencia,

$$\frac{\begin{array}{l} a \to b = \top \\ a = \top \end{array}}{b = \top},$$

donde a, b son dos elementos cualesquiera de E y $\to$ representa la conectiva implicación.

El concepto de verdad y, por tanto, los criterios que deben regir para que una proposición esté en $\top$ han dado lugar a muchos esfuerzos por parte de filósofos y lógicos en un intento por definir dicho concepto correctamente, esfuerzo que ha dado lugar al desarrollo de distintas teorías, como la teoría de la correspondencia, la teoría de la redundancia o la teoría semántica de TARSKI, por citar algunas [75]. No se aborda en este estudio ninguna de estas teorías, aunque evidentemente, al tratar esta tesis de lógica borrosa, se utiliza con frecuencia el concepto de verdad como algo graduado. Interesa más en este momento reflejar cómo se ha ido modificando la interpretación de $\top$ a medida que se han desarrollado nuevos sistemas lógicos.

En lógica clásica bivaluada, al fijar una interpretación, $\top$ está determinado, dado que una proposición es o no es verdadera y así permanece siempre. En cambio en los sistemas lógicos modales, una proposición puede ser verdadera en una situación, en un mundo posible, y falsa en otro. Lo mismo sucede en lógicas temporales, interviniendo en este caso los momentos del tiempo. En sistemas lógicos no monótonos, una proposición puede ser verdadera en un contexto pero pasar a ser falsa cuando la información varíe, es el caso, por ejemplo, de la negación como fallo en Prolog. Como se observa, en estos últimos modelos una proposición es verdadera dependiendo del «estado» en que nos encontremos. En este sentido, la verdad no es un atributo de las proposiciones, es una relación entre las proposiciones y el conocimiento que poseemos. Un buen ejemplo de esta interpretación de la verdad lo constituye una base de hechos sobre la que está definida una relación de consecuencia. La verdad de una proposición dependerá del estado de la base de conocimiento. Bajo este punto de vista parece que la teoría de la correspondencia sería aceptable a efectos prácticos.

En la expresión del *modus ponens* expuesta, otro elemento fundamental que interviene es la conectiva implicación. El objetivo de esta conectiva es representar sentencias condicionales, que en lenguaje natural, en muchas ocasiones, responden a un patrón del tipo *si... entonces...* Pero el lenguaje natural ofrece muchas posibilidades para expresar un conocimiento condicionado, por ello los lógicos tuvieron que formalizar, y, por tanto, reducir, la interpretación de la conectiva implicación, optando por la interpretación material de las sentencias condicionadas mencionadas [57], con lo que la implicación es equivalente a la proposición $\neg a \vee b$. En este estudio se considerarán las expresiones condicionales más como una relación que como una conectiva. Gracias de nuevo a la equivalencia entre cualquier lógica proposicional clásica y un álgebra de Boole, la regla del *modus ponens* también se puede escribir haciendo intervenir una relación en vez de una conectiva. El orden del álgebra de Boole asociada a una lógica proposicional clásica puede definirse del siguiente modo:

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \to b = \top.$$

La regla del *modus ponens* se escribirá entonces como

$$\frac{\begin{array}{c} a \leq b \\ a = \top \end{array}}{b = \top},$$

o sea, $\top$ es cerrado bajo la relación de orden $\leq$.

No es necesario situarse en una estructura tan rica como las álgebras de Boole para ver la equivalencia entre conectivas, es decir, operaciones internas que intenten representar conocimiento condicionado, con relaciones de orden. En [50] se definen las álgebras implicativas como tripletas $(E, \top, \Rightarrow)$, siendo E un conjunto con al menos un elemento $\top$ y $\Rightarrow$ una operación interna, verificando para cualquier $a, b, c \in E$ las cuatro condiciones siguientes:

i) $a \Rightarrow a = \top$,

ii) si $a \Rightarrow b = \top$ y $b \Rightarrow c = \top$ entonces $a \Rightarrow c = \top$,

iii) si $a \Rightarrow b = \top$ y $b \Rightarrow a = \top$ entonces $a = b$,

iv) $a \Rightarrow \top = \top$.

Las álgebras implicativas no son definibles ecuacionalmente [50] y en ellas siempre se verifica la siguiente propiedad:

$$\text{si } a \Rightarrow b = \top \text{ y } a = \top, \text{ entonces } b = \top,$$

es decir, siempre es válido el *modus ponens*, hecho que se demuestra aplicando las propiedades *iii* y *iv*.

Toda aplicación que verifique las tres primeras propiedades de las álgebras implicativas da lugar a una relación de orden al definir

$$a \leq_{\Rightarrow} b \text{ si y sólo si } a \Rightarrow b = \top.$$

Recíprocamente, toda relación $\leq$ sobre un conjunto E, con al menos dos elementos $a_0, \top \in E$, que verifique las propiedades

a) reflexiva,

b) simétrica,

c) transitiva y

d) $a \Rightarrow \top$, para cualquier $a \in E$,

da lugar a un álgebra implicativa del modo siguiente:

$$a \Rightarrow_{\leq} b = \begin{cases} \top & \text{si } a \leq b \\ a_0 & \text{si } a \nleq b \end{cases}.$$

En muchas aplicaciones, como los sistemas basados en el conocimiento, los elementos imprescindibles para conseguir un sistema de deducción son: una relación de consecuencia —dada mediante una o más reglas de inferencia, referidas siempre a una determinada representación de la información condicionada— y un conjunto designado —una base de hechos, de elementos verdaderos—. Interpretando el conjunto de proposiciones verdaderas más como un estado del sistema que como algo inmutable, y utilizando relaciones para representar información condicionada, TRILLAS [67] ha propuesto la siguiente:

Definición I

Sea E un conjunto y V un subconjunto propio de E, una relación[1] $\Rightarrow \subset E\times E$ es un V-condicional si y sólo si para cualquier par de elementos $a, b \in E$ se cumple que

si $a\in V$ y $a\Rightarrow b$, entonces $b\in V$.

En el caso en el que $\Rightarrow$ sea un V-condicional, se dirá también que V es un **estado lógico** para $\Rightarrow$.

Sobre un conjunto de proposiciones, la interpretación material de la conectiva implicación da lugar a la relación conocida como condicional material $\underset{V}{\rightarrow}$ asociada a cierto subconjunto V e igual a $V\times V + (E - V)\times E$. Es interesante resaltar que el condicional material es el mayor V-condicional, puesto que una relación es un V-condicional si y sólo si $\Rightarrow \subseteq \rightarrow$.

La definición anterior puede trasladarse a lógica borrosa como sigue.

[1] La notación $(a,b)\in\Rightarrow$ se sustituirá habitualmente por $a\Rightarrow b$.

Definición II

Sea $\mu:E\to[0,1]$ un subconjunto borroso de cierto universo E y $R:E\times E\to[0,1]$ una relación borrosa, se dice que R es un μ-T-condicional, siendo T una t-norma (*vid.* Apéndice), si se verifica que

$$T(\mu(a),R(b/a))\leq\mu(b), \tag{1}$$

para todo par de puntos a,b de E. De nuevo μ es un T**-estado lógico** de R si R es un μ-T-condicional.

Conviene resaltar algunas características interesantes de la desigualdad (1). En primer lugar, al ser una generalización del caso clásico, le incluye como caso particular. Al verificar toda t-norma, $T(1,1)=1$, si μ_V es una función de pertenencia clásica para un subconjunto V y R una relación también clásica, se cumple por (1) que R es un V-condicional. En segundo lugar, en el mundo de las lógicas multivaluadas y considerando de nuevo E un conjunto de proposiciones, se puede interpretar μ como una función que asigna grados de verdad a los elementos de E y R puede ser cualquier relación que represente una relación condicional entre los elementos de E. La desigualdad (1) obligaría a que R cumpliese el *modus ponens*. Por ejemplo, a las medidas de incertidumbre $g:E\to[0,1]$ sobre un álgebra de Boole E se les suele exigir las propiedades:

i) $g(\bot)=0$,

ii) $g(\top)=1$,

iii) $g(p)\leq g(q)$ si $p\to q=\top$,

siendo $\bot$ el elemento mínimo del álgebra. Si sobre E se define la relación clásica asociada a la conectiva implicación

$$R(q/p)=\begin{cases}1 & \text{si } p\to q=\top\\ 0 & \text{si } p\to q=\bot\end{cases},$$

la condición

$$T(g(p),R(q/p))\leq g(q) \quad \text{para todo } p,q\in E,$$

se cumplirá si y sólo si $g(p)\leq g(q)$, es decir, g verificaría *iii*. Si a la medida g se le imponen otros axiomas, resultan medidas de posibilidad y de necesidad, de probabilidad, etc.

En tercer lugar, la definición (1) proviene también de una regla de inferencia propuesta por ZADEH [94]: la regla composicional de inferencia. Dado un subconjunto borroso μ y una relación borrosa R, se puede escribir esquemáticamente la regla composicional de inferencia como

$$\eta=\mu\circ R. \tag{2}$$

El subconjunto borroso η es la deducción obtenida al aplicar la composición de μ con R mediante $\circ$. ZADEH utilizó en su definición la composición $Max-Min$ para la regla de inferencia, aunque en trabajos posteriores sugirió la posibilidad de tomar otro tipo de composición. En general, utilizando una composición $Max-T$, la expresión (2) queda como

$$\eta(b)=\underset{a\in E}{Sup}\, T(\mu(a),R(b/a)).$$

Si μ fuese un T-estado lógico para R, se cumpliría que

$$\underset{a\in E}{Sup}\, T(\mu(a),R(b/a))\leq\mu(b), \tag{3}$$

al aplicar la relación (1). Basta con que R sea reflexiva para que se dé la igualdad en (3) y, con ello, μ sea un punto fijo del operador $H(\mu)=\mu\circ R$.

Una condición necesaria y suficiente para que μ sea un estado lógico de R es que se verifique

$$R\leq I_{\mu}^{T},$$

siendo $I_{\mu}^{T}(b/a)=Sup\{z\in[0,1]:T(\mu(a),z)\leq\mu(b)\}$ la operación pseudoinversa, respecto al subconjunto borroso μ, de la t-norma T, que supondremos siempre continua [*vid.* Apéndice]. Las relaciones borrosas I_{μ}^{T} han sido ampliamente estudiadas en lógica borrosa como funciones de implicación [7, 91]. En [17] puede verse que son una buena generalización del condicional material clásico y, por ello, se denominan habitualmente condicionales materiales borrosos. También estas relaciones reciben el nombre de preórdenes elementales borrosos debido al teorema de representación para preórdenes [85, 90]. Dicho teorema afirma que una relación borrosa R es un preorden, es decir, reflexiva y T-transitiva [*vid.* Apéndice], si y sólo si existe una familia de subconjuntos borrosos μ_i tales que

$$R = \inf_{\mu_i} I^T_{\mu_i}.$$

Los preórdenes son buenos candidatos para representar relaciones condicionales. Esta afirmación se justifica en los trabajos [14, 74], donde se demuestra que todo preorden borroso puede considerarse como un operador de consecuencias borroso en el sentido dado por TARSKI [56].

La presente memoria aborda en su primera parte un estudio detallado de algunas propiedades fundamentales de los estados lógicos de las relaciones borrosas, y en especial de los preórdenes elementales. El Capítulo 1 comienza con un repaso de los conceptos básicos sobre estados lógicos y resultados ya obtenidos, luego se estudia la igualdad de preórdenes elementales definidos a partir de dos subconjuntos borrosos, dando a continuación un método para obtener un representante canónico de la clase de subconjuntos borrosos que generan el mismo condicional material borroso. Por último se caracterizan los estados lógicos borrosos de un preorden elemental.

En el Capítulo 2 se estudian las clases de un preorden borroso. Para una relación borrosa cualquiera R la clase de un elemento a se define como

$$\mu_a^R(b) = R(b/a).$$

Las clases de una relación reflejan muchas de sus propiedades esenciales: si R es reflexiva, todas sus clases están normalizadas, es decir, tienen puntos; si R es T-transitiva, todas sus clases son T-estados lógicos, siendo también esta condición suficiente. En la memoria se aborda el problema de obtener los subconjuntos borrosos lineales habituales, es decir, números triangulares y trapezoidales, como clases de cierto tipo de relación borrosa.

Para finalizar la Parte I, el Capítulo 3 se dedica a analizar los estados lógicos clásicos de una relación también clásica. Se han considerado dos tipos de estados lógicos: los irreducibles, aquellos que no se pueden descomponer como unión de otros dos estados lógicos, y los minimales, caracterizados por no contener ningún estado lógico propio. El interés de estos estudios es doble: por una parte, los estados lógicos irreducibles caracterizan a un preorden y, por otra, los estados lógicos minimales presentan importantes propiedades referidas al encadenamiento de la relación. Con ello se persigue una posible generalización al mundo de los estados lógicos borrosos y la obtención de distintos sistemas de lógicas clásicas no monótonas.

Representación de predicados vagos

La segunda parte de la memoria está dedicada a la representación de predicados vagos mediante subconjuntos borrosos, lo que constituye el punto de partida de la lógica borrosa. Los predicados vagos son predicados graduados, de forma que las proposiciones «x es P» no presentan únicamente dos valores de verdad $\{0,1\}$ sino que toman valores en el intervalo $[0,1]$. A la función $\mu_P: E \rightarrow [0,1]$, que da el grado de verdad de la proposición mencionada para cada elemento x del universo de discurso E, se la denomina función de compatibilidad. La expresión de dicha función es en general desconocida. Lo que se hace en lógica fuzzy es asignarle una expresión mediante un subconjunto borroso $\underline{P}$, dado por una función de pertenencia generalizada $\varphi_{\underline{P}}$. La forma de obtener $\varphi_{\underline{P}}$ es un problema crucial en la teoría [28]. Se han propuestos diversos métodos para obtener la expresión de $\varphi_{\underline{P}}$ que mejor modelice al predicado P. Así, se han considerado criterios individuales o colectivos, como, por ejemplo, criterios de expertos que valoran diferentes situaciones [101], criterios estadísticos basados en muestreo y recuento de frecuencias [44], técnicas de simulación, procesos de análisis de alternativas, procesos de adaptación, frecuentes en ingeniería de control, el proceso propuesto por ZHANG en [100], etc. La obtención de $\varphi_{\underline{P}}$ es un proceso fundamentalmente local, en el sentido de que depende en gran medida del universo que se considere para el predicado P.

El carácter local de la selección de $\varphi_{\underline{P}}$ no es el único que aparece en lógica fuzzy, como se refleja en [9]. La elección de las conectivas también puede depender del problema que se esté considerando. En general, la lógica fuzzy dispone de un «arsenal» de operaciones que pueden representar conectivas como la conjunción, la disyunción, la negación o la implicación. Ejemplos de funciones que se utilizan habitualmente son las t-normas y t-conormas [7, 91], las funciones de agregación [38], las funciones de implicación [86], las funciones de negación [60], etc.

En la presente memoria se ha planteado encontrar un método para la obtención de la función de pertenencia generalizada, $\varphi_{\underline{P}}$, para cierto predicado P, que pudiese cumplir dos objetivos: en primer lugar, la construcción de una forma sistemática de $\varphi_{\underline{P}}$ y, en segundo, plantear un método para elegir conectivas adecuados asociados al predicado. Con ello se persigue abrir una vía de investigación sobre el carácter local de la lógica fuzzy, considerando vinculados, y no separados —como hasta el momento se consideraba generalmente en lógica borrosa—, la utilización de subconjuntos borrosos, mecanismo de representación de predicados vagos, y el uso de conectivas lógicas.

En el Capítulo 4 se propone un método para la obtención de la función de pertenencia generalizada de un predicado borroso, cuando conocemos su uso mediante un sistema de reglas, y de algunos elementos distinguidos prototípicos o antiprototípicos del predicado. A continuación se dan algunas formas de obtener conectivas lógicas asociadas al predicado mediante el proceso por el que se ha obtenido su función de pertenencia.

La expresión de un predicado borroso aparece ligada en lógica fuzzy a otro concepto básico de la teoría: el concepto de variable lingüística. Una variable lingüística es una variable que toma valores que son expresiones lingüísticas. Por ejemplo, *altura* sería una variable lingüística cuando consideramos como sus posibles valores *alto, bajo, mediano, no muy alto*, etc.; el mismo caso es el de *edad*, con valores como *viejo* o *joven*; o el de *verdad,* con *verdadero, falso, muy verdadero*, etc.

Los casos expuestos de variables lingüísticas tienen un rasgo en común, sus valores pueden construirse mediante un predicado principal, en los ejemplos podría ser *alto*, *joven* y *verdadero*, respectivamente; por su antónimo, *bajo, viejo* y *falso*; y por conectivas y modificadores lingüísticos, que aparecerían en expresiones del tipo *ni muy alto ni muy bajo*. Debido a esta característica en el Capítulo 5 se estudia una representación en lógica borrosa de los antónimos y sinónimos, obteniendo nuevos resultados. Además, se caracterizan los automorfismos del intervalo $[0,1]$ cuando se consideran sobre él dos operaciones, dadas por una t-norma arquimediana y su dual. Por último, se estudia cuándo existe un automorfismo que transforma un subconjunto borroso en otro en un universo finito, considerando la t-norma Min y su dual Max.

PARTE I. ESTADOS LÓGICOS

CAPÍTULO 1. ESTADOS LÓGICOS BORROSOS

En el presente capítulo se aborda el estudio de algunas cuestiones sobre estados lógicos borrosos y en particular su relación con los preórdenes elementales. Después de una introducción sobre los conceptos básicos que se utilizan y sobre algunos resultados ya conocidos, se estudia cuándo dos subconjuntos borrosos dan lugar al mismo preorden elemental, considerando la t-norma mínimo y las t-normas arquimedianas. Una vez descritas las condiciones necesarias y suficientes para que esto ocurra, se analiza cómo es posible obtener un representante canónico de la clase de los subconjuntos borrosos que dan lugar al mismo preorden borroso. Este resultado permite justificar, en muchos casos, la elección de representantes normalizados en la clase. Para finalizar el capítulo se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto borroso sea un T-estado lógico de un preorden elemental. La característica fundamental de los estados lógicos es que dan lugar al mismo preorden sobre los elementos del universo de discurso.

1.1. Definición y propiedades básicas

Una estructura relacional borrosa, inexacta o fuzzy, es un par (X,R) formado por un conjunto X, denominado universo del discurso o conjunto base, que puede estar dotado de algún tipo de estructura algebraica y de una función $R: X \times X \to [0,1]$ denominada relación borrosa. El valor $R(b/a)$ se interpreta como el grado de relación entre los elementos del par (a,b). Como caso particular se consideran las estructuras relacionales clásicas $(X,\Rightarrow)$, donde la relación $\Rightarrow$ es bivaluada, es decir, su función de pertenencia $R=\varphi_{\Rightarrow}$ toma sólo valores en $\{0,1\}$.

Se denomina $\mathcal{F}(X) \approx [0,1]^X$ a la clase de subconjuntos borrosos del universo X identificándolos por su función de pertenencia generalizada μ. $\wp(X) \approx \{0,1\}^X$ representará como es habitual, al subconjunto de $\mathcal{F}(X)$ formado por las funciones características de los subconjuntos clásicos.

Definición 1.1.1

Se dirá que un subconjunto borroso $\mu \in \mathcal{F}(X)$ es un T-estado lógico de (X,R), siendo T una t-norma (*vid.* Apéndice)[2], para la estructura relacional (X,R), si se verifica la siguiente condición:

$$T(\mu(a), R(b/a)) \leq \mu(b),$$

para todo $a,b \in X$.

[2] Si no se indica lo contrario, se entiende en este estudio t-norma como t-norma continua.

Como es fácil de comprobar, los subconjuntos borrosos constantes, definidos como $\mu(a)=\alpha$ para todo $a\in X$, y $\alpha\in[0,1]$, siempre son estados lógicos para cualquier estructura relacional y cualquier t-norma. Denominaremos estados lógicos propios a los estados lógicos no constantes y denotaremos mediante $T(X,R)$ al conjunto de T-estados lógicos de la estructura relacional (X,R).

La demostración de las siguientes propiedades básicas del conjunto $T(X,R)$ puede encontrarse en [17, 70].

Teorema 1.1.2

1. $T(X,R)$ es un subretículo del retículo $(\mathscr{F}(X),Min,Max)$, además si T es una t-norma continua, entonces el subretículo es completo.
2. Si $T'\leq T$, entonces $T(X,R)\subseteq T'(X,R)$.
3. Si $R'\leq R$ entonces $T(X,R)\subseteq T(X,R')$.

Ejemplos 1.1.3

1. Para un subconjunto borroso cualquiera $\mu\in\mathscr{F}(X)$, se definen las siguientes relaciones borrosas suficientemente conocidas en lógica fuzzy [70]:

$$R_{\mu}^{KD}(b/a)=Max(1-\mu(a),\mu(b))$$

$$R_{\mu}^{W}(b/a)=Max(1-\mu(a),Min(\mu(a),\mu(b)))$$

$$R_{\mu}^{r}(b/a)=1-\mu(a)+\mu(a)\mu(b),$$

denominadas implicaciones de Kleene-Dienes, Willmot y Reichenbach, respectivamente. Considerando la t-norma de Lukasiewicz, $W(x,y)=Max(0,x+y-1)$, no es difícil comprobar [71] que $\mu \in W(X, R_\mu^{KD}) \cap W(X, R_\mu^{W}) \cap W(X, R_\mu^{r})$. Además, debido a la definición de la t-norma W, para cualquier otro $\eta \in \mathscr{F}(X)$ se cumple que:

$$\eta \in W(X, R_\mu^{KD}) \text{ si y sólo si } \eta(a) - \eta(b) \leq 1 - Max(1 - \mu(a), \mu(b)) =$$
$$= Min(\mu(a), 1 - \mu(b)),$$

$$\eta \in W(X, R_\mu^{W}) \text{ si y sólo si } \eta(a) - \eta(b) \leq Min(\mu(a), Max(1 - \mu(a), 1 - \mu(b))),$$

$$\eta \in W(X, R_\mu^{KD}) \text{ si y sólo si } \eta(a) - \eta(b) \leq \mu(a)(1 - \mu(b)),$$

para todo par de elementos a, b de X. A modo de ejemplo vamos a calcular los W-estados lógicos de R_μ^{KD} para un subconjunto borroso μ que alcance los valores 0 y 1.

Los subconjuntos clásicos $[\mu]_\alpha$ de X representarán los α-cortes de un subconjunto borroso μ y se definen como:

$$[\mu]_\alpha = \{x \in X : \mu(x) \geq \alpha\}.$$

El subconjunto $(\mu)_0$ de X será el soporte de un subconjunto borroso μ, y se define como

$$(\mu)_0 = \{x \in X : \mu(x) > 0\}.$$

Se dice que un subconjunto borroso μ está normalizado, o que «tiene puntos», si $[\mu]_1$ es distinto del vacío, es decir, existe al menos un elemento $a \in X$ tal que $\mu(a) = 1$. De igual forma, se dice que μ «no tiene puntos» si el complementario de $(\mu)_0$, escrito $(\mu)_0'$, es no vacío y, por tanto, existe al menos un elemento $b \in X$ tal que $\mu(b) = 0$. Evidentemente, un subconjunto borroso μ no tiene puntos si su complementario, definido como $\mu'(x) = N(\mu(x))$, siendo N una función de negación, tiene puntos.

Proposición 1.1.4

Sea μ un subconjunto borroso que tiene y no tiene puntos, las condiciones siguientes son necesarias y suficientes para que un subconjunto borroso η pertenezca a $W(X,R_{\mu}^{KD})$:

i) $[\mu]_1 \subseteq [\eta]_{\alpha_\eta}$, siendo $\alpha_\eta = sup\{\eta(x) : x \in X\}$,

ii) η es constante sobre $(\mu)_0^{/}$, además η alcanza su mínimo valor $\beta_\eta = inf\{\eta(x) : x \in X\}$ en los puntos de $(\mu)_0^{/}$,

iii) para todo elemento x de X se verifica

$$\mu(x) - (1 - \alpha_\eta) \leq \eta(x) \leq \mu(x) + \beta_\eta .$$

Demostración. Tomando $\eta \in W(X,R_{\mu}^{KD})$, se prueba que las tres condiciones son necesarias.

i) Sea $a \in [\mu]_1$, se verificará que

$$\eta(x) - \eta(a) \leq Min(\mu(x), 1 - \mu(a)) = 0$$

para todo $x \in X$; por tanto, $\eta(x) \leq \eta(a)$ para todo x y η alcanzará su máximo valor en a.

ii) Sea $b \in (\mu)_0^{/}$, entonces $\eta(b) - \eta(x) \leq Min(\mu(b), 1 - \mu(x)) = 0$ para todo x, luego η alcanza su mínimo valor en b. Tomando dos elementos $b, b^{/}$ de $(\mu)_0^{/}$, es evidente que $\eta(b) = \eta(b^{/})$.

iii) Sea, por último, $a \in [\mu]_1$ y $b \in (\mu)_0^{/}$, por consiguiente, $\eta(a) = \alpha_\eta$ y $\eta(b) = \beta_\eta$ por *i* y *ii*; se cumplirá la relación

$$\eta(a) - \eta(x) \leq Min(\mu(a), 1 - \mu(x)) = 1 - \mu(x),$$

de lo que se deduce que $\mu(x) - (1 - \alpha_\eta) \leq \eta(x)$ para todo $x \in X$. Por otra parte, también se cumplirá que

$$\eta(x) - \eta(b) \leq Min(\mu(x), 1 - \mu(b)) = \mu(x),$$

luego $\eta(x) \leq \mu(x) + \beta_\eta$.

Para demostrar que las condiciones son suficientes, en primer lugar se observa que al verificar un subconjunto borroso η las condiciones *i* y *ii* alcanzará un valor máximo α_η y un valor mínimo β_η. El subconjunto borroso $\tilde{\eta}$, definido como $\tilde{\eta}(x) = \eta(x) - \beta_\eta$, tendrá como valor mínimo cero y como valor máximo $\alpha_{\tilde{\eta}} = \alpha_\eta - \beta_\eta$. Por otra parte, se cumple trivialmente que $\tilde{\eta} \in W(X, R_\mu^{KD})$ si y sólo si $\eta \in W(X, R_\mu^{KD})$, ya que la suma de una constante no afecta a la condición de pertenencia a $W(X, R_\mu^{KD})$. La condición *iii* para $\tilde{\eta}$ se escribirá entonces como

$$\mu(x) - (1 - \alpha_{\tilde{\eta}}) \leq \tilde{\eta}(x) \leq \mu(x). \qquad \textbf{(1)}$$

Por la segunda desigualdad de esta condición es evidente que $\tilde{\eta}(x) - \tilde{\eta}(y) \leq \tilde{\eta}(x) \leq \mu(x)$ para todo $x, y \in X$. Tomando un elemento a de X, donde $\tilde{\eta}$ alcance su máximo valor, se cumple que

$$\tilde{\eta}(x) - \tilde{\eta}(y) \leq \tilde{\eta}(a) - \tilde{\eta}(y) \leq 1 - \mu(y)$$

para todo $x, y \in X$, por la primera desigualdad de (1). Uniendo estas dos desigualdades, se verificará que

$$\tilde{\eta}(x) - \tilde{\eta}(y) \leq Min(\mu(x), 1 - \mu(y))$$

para todo par de elementos x, y de X, condición que establece que $\tilde{\eta} \in W(X, R_\mu^{KD})$ y, por ello, $\eta \in W(X, R_\mu^{KD})$. ■

Las tres condiciones del teorema permiten conocer cómo son los elementos de $W(X, R_\mu^{KD})$ cuando μ tiene y no tiene puntos: $\eta \in W(X, R_\mu^{KD})$ alcanza su máximo valor al menos en el conjunto de puntos $[\mu]_1$, es constante en $(\mu)_0^{/}$, es decir, donde μ toma el valor cero y existe un «límite» para el resto de valores de η dado por la condición *iii*. En la Figura 1 puede verse un ejemplo de estado lógico de $W(X, R_\mu^{KD})$ para un subconjunto borroso μ triangular.

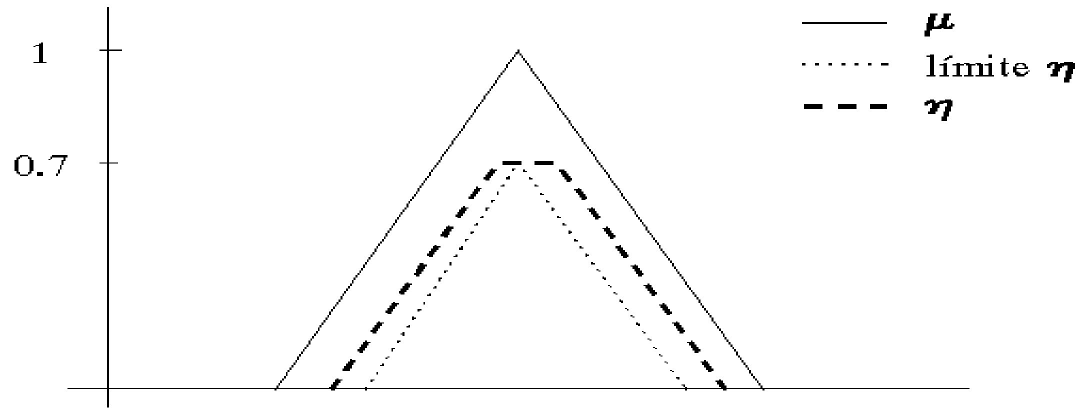


Figura 1. Ejemplo de estado lógico borroso de la relación Max(1-μ,μ).

2. Sea $(X,+,\cdot,/,p)$ un álgebra de Boole probabilizada y la relación $R_p(b/a)=p(a'+b)$ definida sobre ella. Se cumple que $p\in W(X,R_p)$, verificándose también que todos los subconjuntos borrosos de la forma $\mu(a)=k_1+k_2p(a)$, con $k_1,k_2\in[0,1]$ y tales que $0\leq\mu(a)\leq 1$ para todo $a\in X$, son W-estados lógicos para la estructura relacional borrosa (X,R_p). En efecto, se debe cumplir que

$$Max(0,\mu(a)+p(a'+b)-1)\leq \mu(b),$$

pero para ello basta con que se verifique $\mu(a)+p(a'+b)-1\leq\mu(b)$; lo cual es cierto, ya que, teniendo en cuenta la relación $a=ab+ab'$, que es válida en toda álgebra de Boole, se tendrá:

$$\begin{aligned}\mu(a)+p(a'+b)-1 &= k_1+k_2p(a)+1-p(a)+p(ab)-1 = \\ &= k_1+k_2p(ab)+k_2p(ab')-p(ab)-p(ab')+p(ab)\leq \\ &\leq k_1+k_2p(b)+k_2p(ab')-p(ab')\leq \\ &\leq k_1+k_2p(b) = \\ &= \mu(b),\end{aligned}$$

dado que $p(ab)\leq p(a)$ y $k_2p(ab')\leq p(ab')$. Son interesantes las dos siguientes observaciones. En primer lugar, si un subconjunto borroso μ de la forma k_1+k_2p toma un valor mayor que 1 (menor que 0 no puede ocurrir), basta tomar $\mu^*(a)=Min(1,\mu(a))\leq\mu(a)$ para obtener un W-estado lógico bien definido, hecho que se demuestra de la misma forma expuesta. En segundo lugar, los estados lógicos μ distintos de p no son nunca funciones de probabilidad. No se ha estudiado si existen W-estados lógicos para R_p distintos a los expuestos.

3. Considerando el mismo conjunto base del ejemplo anterior y definiendo la relación

$$R^p(b/a) = p(b/a) = \frac{p(ab)}{p(a)},$$

para los elementos a de X con probabilidad positiva, se comprueba fácilmente que $p \in \Pi(X, R^p)$, siendo $\Pi(x,y) = xy$ la t-norma producto (*vid.* Apéndice). Para esta relación el siguiente resultado da de nuevo subconjuntos borrosos que son estados lógicos.

Proposición 1.1.5

Dada una relación borrosa R y un Π-estado lógico μ de R, los subconjuntos borrosos definidos como

$$\eta(a) = k_1 + k_2\mu(a), \; k_1, k_2 \in [0,1] \text{ y } \eta(a) \in [0,1],$$

son siempre T-estados lógicos de R para cualquier t-norma T menor o igual que el producto.

Demostración.

$$\begin{aligned} T(\eta(a), R(b/a)) \le \eta(a) \cdot R(b/a) &= (k_1 + k_2\mu(a)) \cdot R(b/a) = \\ &= k_1 R(b/a) + k_2\mu(a) R(b/a) \le \\ &\le k_1 R(b/a) + k_2\mu(b) \le k_1 + k_2\mu(b) = \\ &= \eta(b). \end{aligned}$$

■

Esta proposición conlleva que los subconjuntos borrosos de la forma $k_1 + k_2 p(a)$ son elementos de $\Pi(X, R^p)$. Al igual que en el ejemplo anterior, puede suceder que $k_1 p(a) + k_2 > 1$, pero es fácil de comprobar que $Min(1, k_1 p(a) + k_2)$ también cumple la proposición 1.1.5. Tampoco se ha estudiado en este caso la existencia de otro tipo de estados lógicos para la relación R^p.

4. En [12] puede verse el siguiente ejemplo: una medida de necesidad [21] sobre un álgebra de Boole es una aplicación $N{:}X\to[0,1]$, verificando $N(ab) = Min(N(a), N(b))$. Se cumple que

$$Min(N(a),N(a'+b))\leq N(b),$$

en consecuencia $N\in Min(X,R_N(b/a))$, siendo $R_N(b/a)=N(a'+b)$.

5. Como último ejemplo, considérese la relación $I_\mu(b/a)=\begin{cases}1 & \text{si } \mu(a)\leq\mu(b)\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

que tiene como Min-estados lógicos a todos los $\eta\in\mathscr{F}(X)$ tales que verifiquen la condición:

$$\mu(a)\leq\mu(b)\ \Rightarrow\eta(a)\leq\eta(b),$$

para todo par de elementos $a,b\in X$; es decir, aquellos que tienen el mismo carácter de monotonía que μ.

Una relación borrosa R se dice que es un T-preorden si verifica las dos condiciones siguientes:

i) R es reflexiva, es decir, $R(a/a)=1$ para cualquier $a\in X$ y

ii) R es T-transitiva con T una t-norma, o sea, $T(R(b/a),R(c/b))\leq R(c/a)$ para cualquier trío $a,b,c\in X$.

Especialmente interesantes son las relaciones conocidas como preórdenes elementales que se definen, para una t-norma continua[3] T y un $\mu \in \mathscr{F}(X)$, como:

$$I_{\mu}^{T}(b/a) = sup\,\{z \in [0,1] : T(\mu(a), z) \leq \mu(b)\}\,.$$

Por ejemplo, para la t-norma Min el preorden elemental que resulta es

$$I^{Min}(y/x) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ y & \text{e.o.c.} \end{cases},$$

denominado habitualmente preorden de Gödel. En el Apéndice pueden verse los ejemplos de preórdenes elementales más utilizados en la presente memoria. Cuando la t-norma es arquimediana se puede obtener la expresión general del preorden elemental generado. Si T es arquimediana, existirá una función $h:[0,1] \to \mathbb{R}^{+}$ continua y estrictamente decreciente, denominada generador aditivo de la t-norma, tal que

$$T(x,y) = h^{(-1)}(h(x) + h(y)),$$

donde $h^{(-1)}$ es la pseudoinversa de h, definida como

$$h^{(-1)}(y) = h^{-1}(Min(y, h(0)).$$

Mediante esta expresión podemos calcular cómo se escribe $I_{\mu}^{T}(b/a)$ en función de h. En primer lugar[4],

$$\begin{aligned} I_{\mu}^{T}(b/a) &= sup\,\{z \in [0,1] : T(\mu a, z) \leq \mu b\} = \\ &= sup\,\{z \in [0,1] : h^{(-1)}(h(\mu a) + h(z)) \leq \mu b\} \end{aligned}$$

Las dos posibilidades siguientes permiten calcular la expresión de I_{μ}^{T}:

---

[3] De hecho no es necesario que la t-norma sea continua, basta con que lo sea por la izquierda y en la segunda componente para que las funciones I_{μ}^{T} tengan propiedades interesantes, [*vid.* Apéndice].

[4] Si no da lugar a error, escribiremos μa por $\mu(a)$ con el fin de simplificar la notación.

$$I_\mu^T(b/a) = sup\{z \in [0,1] : T(\mu a, z) \le \mu b\} =$$
$$= sup\{z \in [0,1] : h^{(-1)}(h(\mu a) + h(z)) \le \mu b\}$$

Las dos posibilidades siguientes permiten calcular la expresión de I_μ^T:

— si $\mu a \le \mu b$, entonces $h(\mu a) \ge h(\mu b)$ y $h(\mu a) + h(z) \ge h(\mu b)$ para todo z. Por tanto, $h^{(-1)}(h(\mu a) + h(z)) \le h^{(-1)}(h(\mu b)) = \mu b$ para todo z, luego $I_\mu^T(b/a) = 1$;

— si, en cambio, $\mu a > \mu b$, será $h(\mu a) < h(\mu b)$ y $h(\mu b) - h(\mu a) \in (0, h(0)]$, puesto que $h(\mu b) - h(\mu a) \le h(\mu b) \le h(0)$. Entonces es $I_\mu^T(b/a) = h^{(-1)}(h(\mu b) - h(\mu a))$. En efecto, en primer lugar se cumple que $I_\mu^T(b/a) \ge h^{(-1)}(h(\mu b) - h(\mu a))$, ya que

$$h^{(-1)}(h(\mu a) + (h(h^{(-1)}(h(\mu b) - h(\mu a)))) =$$
$$= h^{(-1)}(h(\mu a) + h(\mu b) - h(\mu a)) = h^{(-1)}(h(\mu b)) =$$
$$= \mu b$$

teniendo en cuenta que $h(h^{(-1)}(x)) = x$ cuando $x \in [0, h(0)]$.

Por otra parte, para todo $z > h^{(-1)}(h(\mu b) - h(\mu a))$ tendremos $h(z) < h(h^{(-1)}(h(\mu b) - h(\mu a)) = h(\mu b) - h(\mu a)$. Así,

$$h(\mu a) + h(z) < h(\mu b) \le h(0)$$

y aplicando $h^{(-1)}$, $h^{(-1)}(h(\mu a) + h(z)) > h^{(-1)}(h(\mu b)) = \mu b$.

Con todo ello se cumplirá que

$$I_\mu^T(b/a) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu a \le \mu b \\ h^{(-1)}(h(\mu b) - h(\mu a)) & \text{si } \mu a > \mu b \end{cases} =$$
$$= h^{(-1)}(Max(0, h(\mu b) - h(\mu a))) =$$
$$= h^{(-1)}(h(\mu b) \ominus h(\mu a))),$$

siendo $x \ominus y = Max(0, x - y)$.

El siguiente teorema muestra la relación existente entre los estados lógicos de una relación y los preórdenes elementales.

Teorema 1.1.6

Un subconjunto borroso μ es un T-estado lógico, con T una t-norma continua por la izquierda en la segunda componente, de R si y sólo si $R \leq I_\mu^T$.

Demostración. Si $\mu \in T(X,R)$, entonces $T(\mu a, R(b/a)) \leq \mu b$ para todo $a, b \in X$ y, por tanto, $R(b/a) \leq I_\mu^T(b/a)$ por definición de I_μ^T.
Por otra parte, si $R \leq I_\mu^T$ entonces

$$T(\mu a, R(b/a)) \leq T(\mu a, I_\mu^T(b/a)) \leq \mu b.$$

■

Como queda dicho, las relaciones I_μ^T son preórdenes y el siguiente teorema de representación [85, 90] justifica el nombre de elementales. Se da la demostración de un resultado ya conocido por diferir la enunciación del teorema de cómo se presenta en [90].

Teorema 1.1.7

Una relación inexacta R definida sobre un conjunto X es un T-preorden (T continua por la izquierda en la segunda componente) si y sólo si

$$R(b/a) = \inf_{\mu \in T(X,R)} I_\mu^T(b/a).$$

Demostración. Para todo T-estado lógico μ de R se cumplirá, por definición, que

$$T(\mu(a), R(b/a)) \leq \mu(b),$$

luego $R(b/a) \leq I_\mu^T(b/a)$ y $R(b/a) \leq \inf_\mu I_\mu^T(b/a)$. Al ser R reflexiva y T-transitiva, sus clases definidas como

$$\mu_a^R(b) = R(b/a)$$

verificarán que $\mu_a(a) = 1$ y serán además T-estados lógicos, puesto que

$$T(\mu_a^R(b), R(c/b)) = T(R(b/a), R(c/b)) \leq R(c/a) = \mu_a^R(c).$$

Tendremos, en consecuencia, que

$$I_{\mu_a^R}^T(b/a) = \sup\{z \in [0,1] : T(\mu_a^R(a), z) \leq \mu_a^R(b)\} = \mu_a^R(b) = R(b/a)$$

y, por tanto,

$$\inf_{\mu \in T(X,R)} I_\mu^T(b/a) \leq I_{\mu_a^R}^T(b/a) = R(b/a).$$

La condición es también suficiente y se prueba teniendo en cuenta que R será reflexiva al serlo los preórdenes elementales y además de T-transitiva por serlo los preórdenes elementales,

$$\begin{aligned} T(R(b/a), R(c/b)) &= T(\inf_\mu I_\mu^T(b/a), \inf_\mu I_\mu^T(c/b)) \leq \\ &\leq \inf_\mu T(I_\mu^T(b/a), I_\mu^T(c/b)) \leq \inf_\mu I_\mu^T(c/a) = \\ &= R(c/a). \end{aligned}$$ ■

Si nos restringimos al caso clásico, los subconjuntos vendrán expresados por funciones de pertenencia clásicas, φ_V, para cada subconjunto $V \in \wp(X)$, y la relación también será clásica con función de pertenencia $\varphi_{\Rightarrow}$. La condición de la definición 1.1.1 se escribirá entonces como

$$T(\varphi_V(a), \varphi_{\Rightarrow}(b/a)) \leq \varphi_V(b),$$

para cualquier par $a, b \in X$. Al verificar las t-normas la propiedad $T(1,1) = 1$, la condición en este caso es realmente

$$\text{si } a \in V \text{ y } a \Rightarrow b, \text{ entonces } b \in V.$$

Por ello $V \in \wp(X)$ será un estado lógico para la estructura relacional clásica $(X, \Rightarrow)$ si es cerrado bajo la regla de inferencia del *modus ponens*. Se denota mediante $L(X, \Rightarrow)$ al conjunto de estados lógicos clásicos. Es evidente que el conjunto vacío y X son siempre estados lógicos y, como en el caso borroso, se denominan estados lógicos propios a los distintos del vacío y del total.

Ejemplos 1.1.8

1. Consideremos la estructura relacional definida en el punto 5 de los ejemplos 1.1.3. La relación definida es clásica y, por tanto, se puede analizar cómo son sus estados lógicos clásicos. En primer lugar, los α-cortes de μ, $[\mu]_\alpha$, son estados lógicos de (X, I_p), para todo $\alpha \in [0,1]$, ya que, si $a \in [\mu]_\alpha$ y $I_\mu(b/a) = 1$, se cumplirá que $\alpha \leq \mu(a) \leq \mu(b)$ y $b \in [\mu]_\alpha$.

Mediante β_V se denotará el ínfimo de los valores que toma un subconjunto borroso μ sobre un subconjunto clásico V de X,

$$\beta_V = inf\{\mu(a) : a \in V\}.$$

Se dice que un subconjunto clásico V es cerrado bajo μ si el valor β_V se alcanza en V, es decir, si existe un elemento a de V tal que $\mu(a) = \beta_V$.

Si un subconjunto V es cerrado bajo μ, se verificará que $V \in L(X, I_\mu)$ si y sólo si $V = [\mu]_{\beta_V}$. Para comprobar esta afirmación basta considerar en primer lugar que si

$V = [\mu]_\alpha$, para algún α, entonces V será un estado lógico, como se ha probado anteriormente. Por otra parte si $V \in L(X, I_\mu)$, es evidente que $V \subseteq [\mu]_{\beta_V}$. Además se cumple que $[\mu]_{\beta_V} \subseteq V$, ya que, si $a \in [\mu]_{\beta_V}$, entonces $\mu(a_{\beta_V}) \leq \mu(a)$ y, como $a_{\beta_V} \in V$ al ser V cerrado bajo μ, se verificará que $a \in V$.

2. Sea $(X, \cdot)$ un inf-semirretículo [10] y $\leq$ la relación de orden parcial asociada a la operación $\cdot$, $a \leq b \Leftrightarrow a \cdot b = a$. Se verifica entonces que $V \in L(X, \leq)$ si y sólo si se cumple la condición:

$$a \cdot b \in V \Rightarrow a \in V \text{ y } b \in V, \qquad \textbf{(2)}$$

para cada $a, b \in X$. Resultado evidente, ya que, si $V \in L(X, \leq)$ y $a \cdot b \in V$, como $a \cdot b \leq a$ y $a \cdot b \leq b$, se tendrá que $a, b \in V$. El recíproco es también sencillo; si V cumple la condición (2) y $a \in V$ con $a \leq b$, se cumplirá que $a \cdot b = a \in V$ y, por tanto, $b \in V$. Esto conlleva la siguiente relación entre estados lógicos y filtros [10]: un conjunto V es un filtro si y sólo si verifica las dos condiciones siguientes:

i) $V \in L(X, \leq)$ y

ii) $a \in V$ y $b \in V \Rightarrow a \cdot b \in V$.

La condición (2) presenta una fuerte relación con la monotonía de la relación $\leq$ respecto a $\cdot$. Una relación $\Rightarrow$ se dice $\cdot$ -monótona si para cualquier par de elementos $a, b \in X$ con $a \Rightarrow b$ se verifica $a \cdot c \Rightarrow b$. En [17] se demostró que una relación clásica reflexiva y transitiva es $\cdot$-monótona si y sólo si se verifica la condición (2) para todo estado lógico.

Dado un conjunto $V \in \wp(X)$, se define el condicional material, $\underset{V}{\rightarrow}$, como la relación $V \times V \cup (X - V) \times X$. En el caso en el que V sea la clase de proposiciones verdaderas de un lenguaje lógico proposicional clásico, el condicional material es una relación que da lugar a la conectiva implicación de la lógica bivaluada clásica, como se mostró en la introducción de la memoria. Se verifica que $I^T_{\varphi_V} = \varphi_{\underset{V}{\rightarrow}}$, es decir, que los preórdenes elementales borrosos restringidos a conjuntos clásicos dan la función de pertenencia del condicional material[5]. Debido a esta característica, los preórdenes elementales reciben también el nombre de condicionales materiales borrosos. Así, al restringir el teorema de representación 1.1.7 para preórdenes borrosos al caso clásico, una relación clásica $\Rightarrow$ es un preorden clásico si y sólo si

$$\Rightarrow = \bigcap_{V \in L(X,\Rightarrow)} \underset{V}{\rightarrow}.$$

Análogamente al caso borroso, $V \in \wp(X)$ es un estado lógico para la estructura relacional clásica $(X,\Rightarrow)$ si y sólo si $\Rightarrow \subseteq \underset{V}{\rightarrow}$ y, de nuevo, $L(X,\Rightarrow)$ es la familia más grande para la cual se verifica el teorema de representación. Es interesante hacer notar que existen relaciones clásicas que no tienen ningún estado lógico propio como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.9

Consideremos la relación clásica sobre un conjunto X dada por:

$$a \overset{\varepsilon}{\underset{\mu}{\Rightarrow}} b \text{ si y sólo si } Max(1-\mu a, \mu b) \geq \varepsilon \text{ ,}$$

para cierto subconjunto borroso $\mu \in \mathscr{F}(X)$ y $\varepsilon \in [0,1]$. Tomemos como universo $X = [0,1]$, como $\mu = Id$ y $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Sea V un estado lógico de $\overset{\varepsilon}{\underset{\mu}{\Rightarrow}}$ no vacío y $x \in V$, es evidente que $x \overset{\varepsilon}{\underset{\mu}{\Rightarrow}} y$ para todo $y \geq \varepsilon$, ya que $Max(1-x, y) \geq y \geq \varepsilon$. De esta forma $[\varepsilon, 1] \subseteq V$. Tomando $x = \varepsilon \in V$ y debido a que $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, se verificará que $1 - \varepsilon \geq \frac{1}{2} \geq \varepsilon$ y, así, $\varepsilon \overset{\varepsilon}{\underset{\mu}{\Rightarrow}} y$ para todo $y \in [0,1]$. Por consiguiente, $V = [0,1]$ y el conjunto $L([0,1], \overset{Id}{\underset{\mu}{\Rightarrow}})$ será igual a $\{\emptyset, [0,1]\}$ cuando $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

---

[5] Como se puede ver en [17], el inverso de este resultado únicamente es cierto si la t-norma es no positiva. Cuando la t-norma es positiva existen subconjuntos borrosos no clásicos que dan lugar a condicionales materiales de subconjuntos clásicos.

1.2. Preórdenes elementales

La lógica fuzzy admite habitualmente dos interpretaciones, la primera consiste en considerarla una lógica con valores de verdad que son expresiones lingüísticas tales como *verdadero*, *muy verdadero*, *bastante falso*, etc. La segunda consiste en considerarla una lógica multivaluada en el intervalo $[0,1]$. Bajo ésta última, el análisis de las propiedades que debería verificar una representación funcional de la conectiva implicación ha dado lugar a intensos estudios en la literatura [7, 8, 88]. La situación en todos estos trabajos es parecida: de las muchas propiedades que verifica la conectiva implicación en la lógica clásica, es decir, el condicional material, estudiar aquellas que serían más relevantes para la Lógica borrosa. La reflexividad y la transitividad son propiedades que parecen razonables, y, por tanto, los preórdenes serían buenos candidatos. Parece razonable exigir estas dos propiedades, pues la implicación siempre ha sido la conectiva pensada para representar relaciones entre dos premisas, el antecedente y el consecuente, de forma que la verdad del antecedente obligue a la verdad del consecuente. Así, la reflexividad se ve como natural en sentencias del tipo *si ... entonces ...* La transitividad daría validez al encadenamiento de las relaciones entre las premisas establecidas por la implicación.

La estrecha vinculación de la conectiva implicación con los mecanismos de inferencia de una lógica, puesta de manifiesto en lógica clásica mediante el teorema de deducción, ha hecho que, inevitablemente, si se desea estudiar reglas de inferencia para la lógica fuzzy, como, por ejemplo, la regla del *modus ponens generalizado*, se deba estudiar la forma más adecuada de representar la implicación. Los operadores de consecuencia son, desde los estudios de TARSKI [56], un modelo acreditado para construir relaciones de inferencia en un sistema lógico. A este respecto, en [12, 14, 15] pueden encontrarse resultados que muestran cuándo un preorden da lugar a un operador de consecuencias en lógica fuzzy y a la inversa.

En este contexto, parece, pues, conveniente estudiar qué propiedades presentan los preórdenes elementales, siendo éstos «representantes» de cualquier preorden.

1.2.1. Identidad de preórdenes elementales

Comenzaremos por intentar responder a la siguiente cuestión, ¿cuándo dos subconjuntos borrosos dan lugar al mismo preorden elemental? Analizando el caso clásico, el siguiente teorema muestra qué sucede con el condicional material.

Teorema 1.2.1.1

Dado $W \subset X$, un subconjunto propio de X, no existe ningún $V \in \wp(X)$ distinto de W tal que $\underset{V}{\to} \subseteq \underset{W}{\to}$.

Demostración. Supongamos que existiese V tal que $\underset{V}{\to} \subseteq \underset{W}{\to}$ y veamos que ello implica que $V = W$. Si existe un elemento $a \in W$ con $a \notin V$, entonces para todo $b \notin W$ tendríamos que $a \underset{V}{\to} b$ pero no $a \underset{W}{\to} b$, lo cual es imposible. Si no existe a en esas condiciones, es que $W \subseteq V$ y, si no se da la igualdad, tomando entonces $a \in W \subset V$ y $b \in V$ con $b \notin W$, tendríamos de nuevo $a \underset{V}{\to} b$ y no $a \underset{W}{\to} b$. Luego, forzosamente, $V = W$. ■

Corolario 1.2.1.2

Sean $V, W \in \wp(X)$, se verifica que

$$\rightarrow_W = \rightarrow_V \text{ si y sólo si } W = V$$

■

Por consiguiente, el condicional material determina totalmente el conjunto a través del cual se define.

Al estudiar el caso de los preórdenes elementales borrosos la situación, como es habitual, es más compleja que en el caso clásico. Analizaremos qué relación hay entre dos subconjuntos borrosos μ, η cuando se verifica que $I_\mu^T = I_\eta^T$.

Cuando se define un subconjunto borroso μ sobre un conjunto base X se induce un preorden total $\leq_\mu$ sobre el mismo de la siguiente forma:

$$a \leq_\mu b \text{ si y sólo si } \mu a \leq \mu b.$$

El siguiente teorema afirma que al verificarse $I_\mu^T = I_\eta^T$, μ y η preordenan de la misma forma el conjunto X.

Teorema 1.2.1.3

Sean T y T' dos t-normas cualesquiera,

$$\text{si } I_\mu^T = I_\eta^{T'}, \text{ entonces } \leq_\mu \equiv \leq_\eta.$$

Demostración. Supongamos que $I_\mu^T = I_\eta^{T'}$ y que $\mu a < \mu b$, entonces $I_\mu^T(b/a) = 1 = I_\eta^{T'}(b/a)$ con lo que $\eta a \leq \eta b$, además si fuese $\eta a = \eta b$ se cumpliría $I_\eta^{T'}(a/b) = 1 = I_\mu^T(a/b)$, con lo que sería $\mu b \leq \mu a$ en contra de la hipótesis.

Tomando η, el resultado sale de forma idéntica. Por todo ello $\mu a < \mu b$ si y sólo si $\eta a < \eta b$, cumpliéndose el enunciado del teorema. ■

Para estudiar la relación que existe entre μ y η debemos considerar por separado los casos según sea la t-norma. Comenzamos por $T = Min$.

Teorema 1.2.1.4

$I_\mu^{Min} = I_\eta^{Min}$ si y sólo si, para cualquier $a \in X$,

si $\mu a \neq \eta a$, entonces $\mu a \geq \mu b$ y $\eta a \geq \eta b$, para todo $b \in X$.

Demostración. Sea $I_\mu^{Min}(b/a) = I_\eta^{Min}(b/a)$, para todo $a, b \in X$. Tomemos $a \in X$ tal que $\mu a \neq \eta a$; si no existe, evidentemente $\mu = \eta$ y el teorema se verifica trivialmente. Supongamos que existe un $b \in X$ verificando $\mu a < \mu b$. Por el teorema 1.2.1.3 se cumple $\eta a < \eta b$ pero, por otra parte, $I_\mu^{Min}(a/b) = \mu a = I_\eta^{Min}(a/b) = \eta a$, con lo que $\mu a = \eta a$ llegando a una contradicción. En consecuencia, ha de ser $\mu a \geq \mu b$ para todo $b \in X$. De forma análoga, se obtiene que $\eta a \geq \eta b$ para todo $b \in X$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición del teorema, comprobemos la igualdad $I_\mu^{Min}(b/a) = I_\eta^{Min}(b/a)$ para todo $a, b \in X$:

— si $\mu a = \eta a$ y $\mu b = \eta b$, obviamente $I_\mu^{Min}(b/a) = I_\eta^{Min}(b/a) = 1$;

— si $\mu a = \eta a$ y $\mu b \neq \eta b$, será $\mu b \geq \mu a$ y $\eta b \geq \eta a$ y por ello $I_\mu^{Min}(b/a) = I_\eta^{Min}(b/a) = 1$;

— si $\mu a \neq \eta a$ y $\mu b = \eta b$, se tendrá que $\mu a \geq \mu b$ y $\eta a \geq \eta b$, con lo cual, $I_\mu^{Min}(b/a) = \mu b = \eta b = I_\eta^{Min}(b/a)$;

— y, por último, si es $\mu a \neq \eta a$ y $\mu b \neq \eta b$ al ser $\mu a \geq \mu b$ y $\eta a \geq \eta b$ junto con $\mu b \geq \mu a$ y $\eta b \geq \eta a$, se dará $\mu a = \mu b$ y $\eta a = \eta b$, con lo que

$$I_\mu^{Min}(b/a) = I_\eta^{Min}(b/a) = 1. \qquad \blacksquare$$

En conclusión, $I_\mu^{Min} = I_\eta^{Min}$ no conlleva necesariamente que μ y η sean iguales. No obstante, como mucho se diferenciarán en el conjunto de puntos de X donde alcanzan su valor máximo. Como caso particular tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.1.5

Si μ y η son tales que alcanzan valores máximos α_μ, α_η iguales, entonces se verifica que

$$I_\mu^{Min} = I_\eta^{Min} \text{ si y sólo si } \mu = \eta.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que al ser el valor máximo que alcanzan μ y η el mismo, no pueden diferenciarse en él. ■

Un ejemplo interesante del corolario anterior se da cuando μ y η tengan puntos, puesto que, en ese caso, sus valores máximos serán ambos igual a uno.

Consideraremos a continuación una t-norma T arquimediana. Como vimos en la sección 1.1 se cumplirá que

$$I_\mu^T(b/a) = h^{(-1)}(h(\mu b) \ominus h(\mu a)).$$

Comencemos tomando una t-norma arquimediana estricta y, por consiguiente, se tendrá que $h(0) = \infty$ y $h^{(-1)} = h^{-1}$.

Teorema 1.2.1.6

Si T es una t-norma arquimediana estricta con generador aditivo h, se verifica que

$$I_\mu^T = I_\eta^T \text{ si y sólo si existe un } k \in \mathbb{R} \text{ con } h(\mu a) = k + h(\eta a),$$

para todo $a \in X$.

Demostración. Supongamos que $I_\mu^T = I_\eta^T$ y elijamos $a, b \in X$ cualesquiera. Si es $\mu a < \mu b$, se verificará, por el teorema 1.2.1.3, que $\eta a < \eta b$ y por ello $I_\mu^T(a/b) = h^{-1}(h(\mu a) - h(\mu b)) = I_\eta^T(a/b) = h^{-1}(h(\eta a) - h(\eta b))$, lo cual será verdad si y sólo si $h(\mu a) - h(\mu b) = h(\eta a) - h(\eta b)$ o, lo que es equivalente, si y sólo si $h(\mu a) - h(\eta a) = h(\mu b) - h(\eta b)$.

Aplicando el mismo razonamiento, si $\mu b < \mu a$ será $h(\mu b) - h(\eta b) = h(\mu a) - h(\eta a)$.

Por último, si $\mu a = \mu b$, entonces $\eta a = \eta b$ y, claramente, $h(\mu a) - h(\eta a) = h(\mu b) - h(\eta b)$.

Por tanto, el valor $h(\mu a) - h(\eta a)$ es constante para todo a y así $h(\mu a) - h(\eta a) = k$ para todo $a \in X$.

Recíprocamente, si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in X$ es $h(\mu a) = k + h(\eta a)$, se verificará que $h(\mu a) - h(\mu b) = h(\eta a) - h(\eta b)$. En consecuencia, $h(\mu a) \geq h(\mu b)$ si y sólo si $h(\eta a) \geq h(\eta b)$ y, por tanto, $\mu a \leq \mu b$ si y sólo $\eta a \leq \eta b$, de lo que se deduce que $I_\mu^T(b/a) = 1 = I_\eta^T(b/a)$. Análogamente, si $\mu a > \mu b$ será $\eta a > \eta b$ y

$$I_\mu^T(b/a) = h^{-1}(h(\mu b) - h(\mu a)) = h^{-1}(k + h(\eta b) - k - h(\eta a)) = I_\eta^T(b/a). \qquad \blacksquare$$

El valor de la constante k puede variar en todo $\mathbb{R}$ en principio aunque, implícitamente, esté sujeta a la condición de la definición de h; así, como $0 \leq h(\mu a) \leq \infty$ se cumplirá que $0 \leq k + h(\eta a) \leq \infty$, de lo cual se deduce que $k \geq -h(\eta a)$ para todo a, luego

$$k \geq \sup_a (-h(\eta a)) = -\inf_a h(\eta a) = -h(\inf_a \eta a) = -h(\beta_\eta).$$

La condición del teorema anterior conlleva que μ y η deben tener «formas similares». Además es suficiente con que estén normalizados, o que alcancen el valor cero, para que sean iguales, como muestran los dos corolarios siguientes.

Corolario 1.2.1.7

Si T es arquimediana estricta y μ y η son tales que existen $a, b \in X$ con $\mu a = \eta b = 1$, entonces

$$I_\mu^T = I_\eta^T \text{ si y sólo si } \mu = \eta.$$

Demostración. La condición suficiente es obvia. Por el teorema anterior si $I_\mu^T = I_\eta^T$ existe $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo $c \in X$, $h(\mu c) = k + h(\eta c)$. En particular para $a, h(\mu a) =$

$0 = k + h(\eta a) \leq h(\eta a)$, ya que siempre $0 \leq h(\eta a)$ y, por tanto, debe ser $k \leq 0$. Análogamente, tomando b, $h(\eta b) + k = k = h(\mu b) \geq 0$, luego $k = 0$.

Consecuentemente, $h(\mu c) = h(\eta c)$ para todo c, lo cual implica que $\mu c = \eta c$ para todo c de X ■

Corolario 1.2.1.8

Si T es arquimediana estricta y μ y η son tales que existen $a, b \in X$ con $\mu a = \eta b = 0$, entonces

$$I_\mu^T = I_\eta^T \text{ si y sólo si } \mu = \eta.$$

Demostración. De la condición $h(\mu c) = h(\eta c) + k$ para todo $c \in X$, tomando a se tendrá que $h(0) = k + h(\eta a) \leq k + h(0)$ pues $h(\eta a) \leq h(0)$ para cualquier a, con lo que $0 \leq k$. Como $\eta b = 0$, $h(\mu b) = h(0) + k \leq h(0)$ y $k \leq 0$. Así, $k = 0$ y $\mu = \eta$ punto a punto. ■

Consideremos ahora el caso en que T es una t-norma arquimediana no estricta.

Teorema 1.2.1.9

Si T es una t-norma arquimediana no estricta, con generador aditivo h, entonces:

$$I_\mu^T = I_\eta^T \text{ si y sólo si existe } k \in \mathbb{R} \text{ con } h(\mu a) = k + h(\eta a),$$

para cualquier $a \in X$.

Además, si esto ocurre, se cumplirá que $k \leq h(0) - \sup_a h(\eta a)$.

Demostración. Sea $I_\mu^T = I_\eta^T$ y elijamos a, b cualesquiera,

— si es $\mu a < \mu b$, será $\eta a < \eta b$ y $I_\mu^T(a/b) = h^{(-1)}(h(\mu a) - h(\mu b)) = I_\eta^T(a/b) = h^{(-1)}(h(\eta a) - h(\eta b))$; tomando h en los dos miembros de la expresión en $h^{(-1)}$ y teniendo en cuenta que $h(\mu a) - h(\mu b)$ y $h(\eta a) - h(\eta b)$ pertenecen ambos a $[0, h(0)]$, se cumplirá que $h(\mu a) - h(\eta a) = h(\mu b) - h(\eta b)$;

— de la misma forma, si es $\mu b<\mu a$, entonces $\eta b<\eta a$ y $h(\mu a)-h(\eta a)=$ $h(\mu b)-h(\eta b)$;

— en el caso de ser $\mu b=\mu a$ sería $\eta a=\eta b$ con lo que evidentemente $h(\mu a)-$ $h(\eta a)=h(\mu b)-h(\eta b)$.

En consecuencia, $h(\mu a)-h(\eta a)=k$. Resta tan sólo comprobar que $k\leq h(0)-h(\eta a)$ para cualquier $a\in X$, si existiese a con $k>h(0)-h(\eta a)$ conllevaría que $h(\mu a)=$ $k+h(\eta a)>h(0)-h(\eta a)+h(\eta a)=h(0)$, lo que es imposible.

Recíprocamente, supongamos que existe $k\in\mathbb{R}$ tal que para cualquier $a\in X$ es $k\leq$ $h(0)-h(\eta a)$ y $h(\mu a)=h(\eta a)+k$.

— Si $\mu a\leq\mu b$ entonces $h(\eta a)+k\geq h(\eta b)+k$ y $h(\eta a)\geq h(\eta b)$, con lo que $\eta a\leq\eta b$ y, por tanto, $I_\mu^T(b/a)=I_\eta^T(b/a)=1$;

— si $\mu a>\mu b$ será $h(\eta a)+k<h(\eta b)+k$ y $h(\eta a)<h(\eta b)$, obteniéndose en este caso que $\eta a>\eta b$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}I_\mu^T(b/a)&=h^{(-1)}(h(\mu b)-h(\mu a))=\\&=h^{(-1)}(k+h(\eta b)-k-h(\eta a))=\\&=h^{(-1)}(h(\eta b)-h(\eta b))=\\&=I_\eta^T(b/a).\end{aligned}$$

■

Se debe observar, de nuevo, que si los preórdenes asociados a μ y a η coinciden, μ y η han de tener «formas similares», estando, además, la constante k acotada superiormente por el valor $\inf_a\{h(0)-h(\eta a)\}=h(0)-\sup_a h(\eta a)$. De hecho, por la simetría del razonamiento utilizado, si $h(\mu a)=k+h(\eta a)$, entonces $h(\eta a)=h(\mu a)-k$ y $-k\leq h(0)-h(\mu a)$ para todo $a\in X$, es decir, $k\geq\sup_a h(\mu a)-h(0)$. De esta forma k pertenecerá al intervalo,

$$\sup_a h(\mu a)-h(0)\leq k\leq h(0)-\sup_a h(\eta a).$$

Análogamente al caso de t-normas arquimedianas estrictas, si μ y η tienen puntos o no tienen puntos, serán iguales.

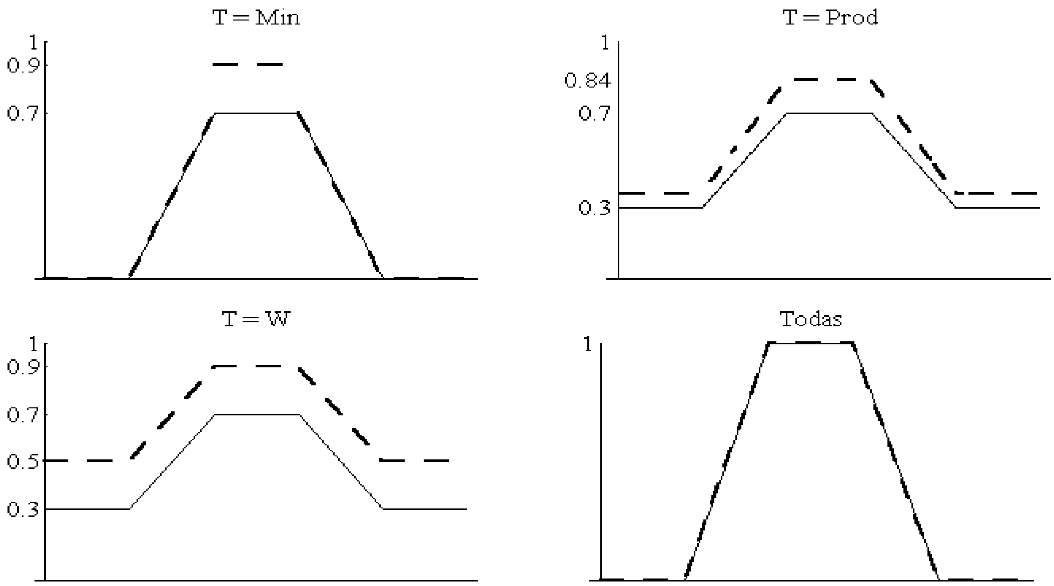


Figura 2.- Subconjuntos borrosos que generan el mismo preorden elemental.

Corolario 1.2.1.10

Si T es una t-norma arquimediana no estricta y μ y η son tales que existen a, $b \in X$ con $\mu a = \eta b = 1$, o existen $a, b \in X$ con $\mu a = \eta b = 0$, entonces

$$I_\mu^T = I_\eta^T \text{ si sólo si } \mu = \eta .$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que existen a, b con $\mu a = \eta b = 0$, es claro que $\sup_c h(\mu c) = h(\mu a)$, así como que $\sup_c h(\eta c) = h(\eta b)$, de lo que se deduce que $k = 0$, sin más que considerar las siguientes desigualdades:

$$\sup_a h(\mu a) - h(0) = h(0) - h(0) = 0 \leq k \leq h(0) - \sup_a h(\eta a) = 0 .$$

Cuando μ y η tengan puntos, la demostración es igual a la del corolario 1.2.1.7.

■

En la Figura 2 puede verse ejemplos de subconjuntos borrosos que dan lugar al mismo preorden elemental para las t-normas Min, Π, W.

1.2.2. Relación de equivalencia entre estados lógicos

Sobre el conjunto de estados lógicos $T(X,R)$ asociado a una relación R sobre un universo X, se define la siguiente relación:

Definición 1.2.2.1

$$\mu \sim \eta \text{ si y sólo si } I_{\mu}^{T} = I_{\eta}^{T}.$$

El siguiente resultado se demuestra de forma sencilla,

Proposición 1.2.2.2

$\sim$ es una relación de equivalencia.

Sea $T(X,R)/\sim = \{\|\mu\| : \mu \in T(X,R)\}$ el conjunto cociente módulo la relación de equivalencia definida. A continuación se presenta un método para tomar un representante para cada clase $\|\mu\|$. Se dividirá el estudio en dos casos: cuando la t-norma es el mínimo y cuando es arquimediana.

Como se definió anteriormente, $[\mu]_{\alpha} = \{a \in X : \mu a \geq \alpha\}$ son los α-cortes de un subconjunto borroso μ, y α_{μ} denota el supremo de los valores que toma μ:

$$\alpha_{\mu} = \sup_{a \in X} \mu a .$$

Es evidente que α_{μ} siempre existe ya que $\mu a \leq 1$. Es fácil comprobar que

$$\alpha_\mu = sup\{\alpha \in [0,1] : [\mu]_\alpha \neq \emptyset\}.$$

Se denomina núcleo de un subconjunto borroso μ, al conjunto de puntos $[\mu]_{\alpha_\mu}$, que puede ser vacío, cuando μ muestre un comportamiento asintótico. Por ejemplo, si tomamos $X = \mathbb{R}$, el subconjunto borroso

$$\mu(x) = 1 - e^{-x^2}$$

verifica que $\alpha_\mu = 1$ no existiendo ningún $x \in \mathbb{R}$ con $\mu x = 1$, con lo que $[\mu]_1 = \emptyset$.

También se cumple la igualdad

$$[\mu]_{\alpha_\mu} = \{a \in X : \mu a \geq \mu b \ \ \forall b \in X\}.$$

1. CASO DE LA T-NORMA *Min*.

Se deben considerar dos posibilidades: que el núcleo de μ sea vacío o que no lo sea.

1.1. $[\mu]_{\alpha_\mu} = \emptyset$.

Se verifica entonces que $\|\mu\| = \{\mu\}$. En efecto, si existiera η con $\eta \sim \mu$, es decir, con $I_\mu^T = I_\eta^T$, por el teorema 1.2.1.4, μ y η sólo se pueden diferenciar en sus valores máximos, cumpliéndose que si $\mu a \neq \eta a$ entonces $\mu a \geq \mu b$ y $\eta a \geq \eta b$, para todo $b \in X$. Pero eso es imposible ya que implicaría la existencia de un máximo valor para μ.

1.2. $[\mu]_{\alpha_\mu} \neq \emptyset$.

En este caso μ toma algún valor máximo y podemos tomar como representante

$$\tilde{\mu} a = \begin{cases} \mu a & \text{si } a \notin [\mu]_{\alpha_\mu} \\ 1 & \text{si } a \in [\mu]_{\alpha_\mu} \end{cases}$$

El siguiente teorema es de demostración evidente,

Teorema 1.2.2.3

$\tilde{\mu} \in \|\mu\|$ y tiene puntos.

Es también claro que $\tilde{\mu}$ no tiene por qué ser una función continua. De hecho, si fuese continua, indicaría que μ tenía puntos y, por tanto, sería el único elemento de su clase.

2. CASO DE UNA T-NORMA ARQUIMEDIANA.

Dado un subconjunto borroso μ, por los corolarios 1.2.1.7, 1.2.1.8 y 1.2.1.10 vistos en el apartado anterior, si μ tiene y no tiene puntos la clase $\|\mu\|$ estará formada únicamente por μ. Supongamos que μ es tal que $0 < \mu a < 1$ para todo $a \in X$, por los teoremas 1.2.1.6 y 1.2.1.9, se sabe que $\mu \sim \eta$ si y sólo si existe $k \in \mathbb{R}$ con $h(\mu a) = k + h(\eta a)$ para todo $a \in X$, siendo $k \leq h(0) - \sup_a h(\eta a)$ si T es no estricta. Dada la clase $\|\mu\|$, se define el subconjunto borroso

$$\tilde{\mu} a = h^{(-1)}(h(\mu a) - h(\alpha_\mu)),$$

para todo $a \in X$. Puesto que $h(\mu a) - h(\alpha_\mu) \in [0, h(0)]$, se cumplirá que

$$\tilde{\mu} a = h^{-1}(h(\mu a) - h(\alpha_\mu)).$$

La comprobación de que $h(\mu a) - h(\alpha_\mu) \in [0, h(0)]$ es inmediata: al ser $\mu a \leq \alpha_\mu$ se tiene que $h(\mu a) \geq h(\alpha_\mu)$, por ser h decreciente, y, así, $h(\mu a) - h(\alpha_\mu) \geq 0$; por otra parte, como $h(\mu a) \leq h(0)$ se cumple que $h(\mu a) - h(\alpha_\mu) \leq h(0) - h(\alpha_\mu) \leq h(0)$.

Teorema 1.2.2.4

$\tilde{\mu}$ es un representante canónico de la clase $\|\mu\|$.

Demostración. En primer lugar, $\tilde{\mu}$ está bien definido, ya que $h(\mu a)-h(\alpha_\mu)\in [0,h(0)]$ y, por tanto, $h^{-1}(h(\mu a)-h(\alpha_\mu))\in[0,1]$. Además, $\tilde{\mu}$ pertenece a la clase de μ: si T es arquimediana estricta se tendrá que $h(\tilde{\mu}a)=h(\mu a)-h(\alpha_\mu)$ y será verdad con $k=-h(\alpha_\mu)$; cuando T sea no estricta se debe comprobar que la constante $-h(\alpha_\mu)$ verifica la acotación superior, lo cual es cierto ya que

$$-h(\alpha_\mu)\leq h(0)-h(\alpha_\mu)=h(0)-h(\sup_a \mu a)=h(0)-\sup_a h(\mu a).$$

Por último, $\tilde{\mu}$ no depende del representante elegido para su obtención. Sea otro subconjunto borroso $\mu'\in\|\mu\|$, existirá, por tanto, una constante k con $h(\mu' a)=k+h(\mu a)$ y $\tilde{\mu}' a=h^{-1}(h(\mu' a)-h(\alpha_{\mu'}))$. Se verifica que $h(\alpha_{\mu'})=k+h(\alpha_\mu)$ por continuidad de h:

$$h(\alpha_{\mu'})=h(\sup_a \mu' a)=\sup_a h(\mu' a)=\sup_a (h(\mu a)+k)=\sup_a h(\mu a)+k=h(\alpha_\mu)+k.$$

Aplicando esta igualdad se tendrá que

$$\tilde{\mu}'(a)=h^{-1}(h(\mu' a)-h(\alpha_{\mu'}))=h^{-1}(k+h(\mu a)-(k+h(\alpha_\mu)))=h^{-1}(h(\mu a)-h(\alpha_\mu))==\tilde{\mu}(a).$$ ■

El representante $\tilde{\mu}$ tiene la siguiente propiedad,

Teorema 1.2.2.5

$\alpha_{\tilde{\mu}}=\sup_a \tilde{\mu} a=1$.

Demostración.

$$\alpha_{\tilde{\mu}}=\sup_a \tilde{\mu} a=\sup_a (h^{-1}(h(\tilde{\mu} a)-h(\alpha_{\tilde{\mu}})))=h^{-1}(h(\sup_a \tilde{\mu} a)-h(\alpha_{\tilde{\mu}}))=$$

$$= h^{-1}(h(\alpha_{\tilde{\mu}}) - h(\alpha_{\tilde{\mu}})) = h^{-1}(0) = 1. \qquad \blacksquare$$

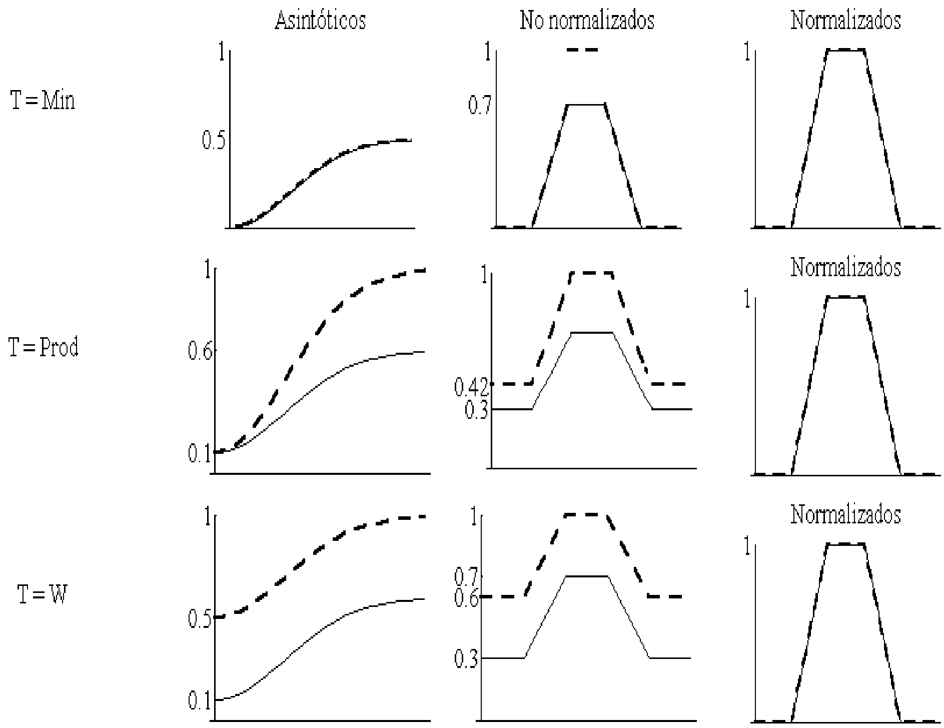


Figura 3.- En trazo discontinuo aparecen los representantes canónicos para los distintos subconjuntos borrosos considerados, según las t-normas Mínimo, Producto y Lukasiewicz.

Aún siendo $\alpha_{\tilde{\mu}} = 1$, $\tilde{\mu}$ no tiene por qué tener puntos debido a un posible comportamiento asintótico.

En la Figura 3 aparece en trazo discontinuo los representantes canónicos para los distintos casos y según la t-norma considerada.

1.2.3. Estados lógicos de un T-preorden elemental

El condicional material borroso, o preorden elemental, asociado a un subconjunto borroso μ, permite definir el siguiente preorden entre estados lógicos:

$$\eta \preceq \mu \text{ si y sólo si } I_\eta^T \geq I_\mu^T.$$

El preorden $\preceq$ dará lugar a un orden parcial en el conjunto cociente $T(X,R)/\sim$. La definición del orden $\preceq$ es equivalente por el teorema 1.1.6 a la condición[6]

$$\eta \preceq \mu \text{ si y sólo si } \eta \in T(X, I_\mu^T).$$

Dicho orden presenta un elemento mínimo, formado por los subconjuntos borrosos constantes $\mu = \alpha$, $\alpha \in [0,1]$, ya que éstos dan lugar al preorden constante $I_\alpha^T = 1$ y son siempre estados lógicos; y no posee, en general, elemento máximo. Para verlo consideremos el siguiente teorema,

Teorema 1.2.3.1

El orden parcial $\preceq$ sobre $T(X,R)/\sim$ tiene elemento máximo si y sólo si R es un preorden elemental.

Demostración. Si existe $\mu \in T(X,R)/\sim$ con $\eta \preceq \mu$ para todo $\eta \in T(X,R)/\sim$, entonces es que $I_\eta^T \geq I_\mu^T$ para todo $\eta \in T(X,R)/\sim$ y, por el teorema de representación,

---

[6] Es debido a que se cumple esta condición por lo que se ha invertido el orden entre preórdenes elementales al definir $\preceq$.

$$R = \inf_{\eta \in T(X,R)} I_\eta^T = I_\mu^T .$$

El recíproco es también sencillo, si $R = I_\mu^T$ entonces, para todo $\eta \in T(X,R)/\sim$, se verificará que $R = I_\mu^T \leq I_\eta^T$, por ser η estado lógico. ■

Basta, por consiguiente, tomar un preorden no elemental R para que el orden $\preceq$ no tenga elemento máximo. Es evidente que si $\eta \preceq \mu$, η es irrelevante en el cálculo del preorden R a través del teorema de representación.

La equivalencia entre $\eta \preceq \mu$ y $\eta \in T(X, I_\mu^T)$ conduce a estudiar condiciones de pertenencia al conjunto $T(X, I_\mu^T)$. En el caso de la t-norma Mínimo tenemos el siguiente resultado de caracterización.

Teorema 1.2.3.2

Un subconjunto borroso η pertenece a $Min(X, I_\mu^{Min})$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

i) si $\mu a \leq \mu b$ entonces $\eta a \leq \eta b$ y

ii) si $\mu a > \mu b$ y $\eta a > \eta b$ entonces $\mu b \leq \eta b$,

para todo par de puntos $a, b \in X$.

Demostración.

a) Las condiciones son necesarias. En efecto,

— si $\mu a \leq \mu b$, entonces $I_\mu^{Min}(b/a) = 1 \leq I_\eta^{Min}(b/a)$, lo que ocurre si y sólo si $\eta a \leq \eta b$;

— y si $\mu a > \mu b$ y $\eta a > \eta b$, se tendrá que $I_\mu^{Min}(b/a) = \mu b \leq I_\eta^{Min}(b/a) = \eta b$.

b) Las condiciones son suficientes. En efecto,

— si $\mu a \leq \mu b$, entonces $Min(\eta a, I_\mu^{Min}(b/a)) = \eta a \leq \eta b$ por *i*;

— y si $\mu a > \mu b$, se cumplirá que $Min(\eta a, I_\mu^{Min}(b/a)) = Min(\eta a, \mu b)$; al ser $\mu a > \mu b$, entonces $\eta a \geq \eta b$, si $\eta a = \eta b$ entonces $Min(\eta a, \mu b) \leq \eta a = \eta b$ y si $\eta a > \eta b$, por la condición *ii* $\mu b \leq \eta b$; así $Min(\eta a, \mu b) \leq \mu b \leq \eta b$.

Consecuentemente siempre $\eta \in Min(X, I_\mu^{Min})$. ■

La condición *i* del teorema afirma que los estados lógicos tienen el mismo carácter de monotonía que μ. De hecho se verificarán las siguientes condiciones de monotonía:

— si μ es constante, entonces η es constante, ya que si $\mu a = \mu b$ se cumplirán $\mu a \leq \mu b$ y $\mu a \geq \mu b$, con lo que $\eta a \leq \eta b$ y $\eta a \geq \eta b$, y, por consiguiente, $\eta a = \eta b$,

— si μ es creciente entonces η es no decreciente y

— si μ es decreciente entonces η es no creciente.

Por otra parte, la condición *ii* afirma que $\mu a \leq \eta a$, siempre que exista un elemento $b \in X$ tal que $\mu b > \mu a$ y $\eta b > \eta a$, lo cual conlleva que μ está siempre por debajo de η salvo quizá donde μ, η alcancen sus valores máximos.

El siguiente teorema establece la relación existente entre el núcleo y el soporte, conjuntos definidos en la página 19, de un estado lógico η de I_μ^{Min}.

Teorema 1.2.3.3

Si $\eta \in Min(X, I_\mu^{Min})$ y $\eta \neq \mathbf{0}$ (el subconjunto borroso idénticamente nulo), entonces se verifican las siguientes condiciones:

i) $[\mu]_{\alpha_\mu} \subseteq [\eta]_{\alpha_\eta}$,

ii) $(\mu)_0 \subseteq (\eta)_0$.

Demostración. Se cumplen las dos condiciones.

i) Si $[\mu]_{\alpha_\mu} = \varnothing$ entonces es trivial. Sea $a \in [\mu]_{\alpha_\mu}$, se tendrá que

$$\sup_b Min(\eta b, I_\mu^{Min}(a/b)) = \sup_b Min(\eta b, 1) = \sup_b \eta b \leq \eta a,$$

por ser η estado lógico, luego $a \in [\eta]_{\alpha_\eta}$.

ii) Sea $a \in (\mu)_0$ —de nuevo si $(\mu)_0 = \varnothing$ sería trivial—, si se cumple que $a \in [\eta]_{\alpha_\eta}$, entonces $a \in (\eta)_0$, puesto que $\eta \neq \mathbf{0}$. Supongamos que $a \notin [\eta]_{\alpha_\eta}$, lo que implica por *i* que $a \notin [\mu]_{\alpha_\mu}$. Caben dos posibilidades: que $[\mu]_{\alpha_\mu} \neq \varnothing$ y, por tanto, exista $b \in [\mu]_{\alpha_\mu} \subseteq [\eta]_{\alpha_\eta}$, tal que $\mu b > \mu a$ y $\eta b > \eta a$, por lo que $0 < \mu a \leq \eta a$, gracias al teorema 1.2.3.2 y en consecuencia $a \in (\eta)_0$; o bien que $[\mu]_{\alpha_\mu} = \varnothing$, en cuyo caso se definen los siguientes conjuntos:

$$(\mu)_{\mu a} = \{b \in X : \mu b > \mu a\}.$$

Se verifica que $(\eta)_{\eta a} \subseteq (\mu)_{\mu a}$, ya que, si $b \notin (\mu)_{\mu a}$ implica que $\mu b \leq \mu a$ y, por el Teorema 1.2.3.2, se cumplirá que $\eta b \leq \eta a$, con lo que $b \notin (\eta)_{\eta a}$. Al tener que $a \notin [\eta]_{\alpha_\eta}$, entonces $(\eta)_{\eta a} \neq \varnothing$ y, por tanto, existirá un $b \in (\eta)_{\eta a} \subseteq (\mu)_{\mu a}$, luego $\mu b > \mu a$ y $\eta b > \eta a$, con lo que $0 < \mu a \leq \eta a$, es decir, $a \in (\eta)_0$. ■

En el caso de las t-normas arquimedianas la caracterización de los estados lógicos de un preorden elemental viene dada por el siguiente

Teorema 1.2.3.4

Un subconjunto borroso η pertenece a $T(X,I_\mu^T)$, con T una t-norma arquimediana, si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

i) si $\mu a \leq \mu b$, entonces $\eta a \leq \eta b$ y

ii) si $\mu a > \mu b$ y $\eta a > \eta b$, entonces $h(\mu b) - h(\mu a) \geq h(\eta b) - h(\eta a)$,

para todo par de puntos $a, b \in X$.

Demostración. La demostración es similar a la del teorema 1.2.3.2, salvo en lo que concierne a la condición *ii*, pero es suficiente considerar que si $\mu a > \mu b$ y $\eta a > \eta b$, entonces, tanto $h(\mu b) - h(\mu a)$ como $h(\eta b) - h(\eta a)$, pertenecen al intervalo $[0, h(0)]$, puesto que

$$h(\mu b) - h(\mu a) \leq \sup_b h(\mu b) - h(\mu a) \leq h(\sup_b \mu b) - h(\mu a) \leq h(0) - h(\mu a) \leq h(0).$$

De esta forma, cuando $\mu a > \mu b$ y $\eta a > \eta b$ se tendrá que $I_\mu^T(b/a) \leq I_\eta^T(b/a)$ si y sólo si $h^{(-1)}(h(\mu b) - h(\mu a)) \leq h^{(-1)}(h(\eta b) - h(\eta a))$, es decir, si y sólo si $h(\mu b) - h(\mu a) \geq h(\eta b) - h(\eta a)$, ya que en ese caso $h^{(-1)} = h^{-1}$. ■

Al verificarse la condición *i* también para las t-normas arquimedianas, los estados lógicos conservan la monotonía. La condición *ii)* no aclara suficientemente cómo son los estados lógicos para los preórdenes elementales definidos a partir de una t-norma arquimediana. El siguiente teorema da una idea de su comportamiento.

Teorema 1.2.3.5

Si μ tiene un núcleo no vacío y $\alpha_\mu = 1$, entonces todos los estados lógicos con puntos de I_μ^T están por encima.

Demostración. Si $\eta \in T(X, I_\mu^T)$, entonces $[\mu]_1 \subseteq [\eta]_1$ ya que si $a \in [\mu]_1$ se cumple que

$$\sup_b T(\eta b, I_\mu^T(a/b)) = \sup_b T(\eta b, 1) = \sup_b \eta b \leq \eta a$$

y, por tanto, $a \in [\eta]_1$. Aplicando la condición *ii* del teorema 1.2.3.4, tendremos que para todo b de X, con $\mu b < 1$ y $\eta b < 1$, se debe cumplir que $h(\mu b) - h(\mu a) \geq h(\eta b) - h(\eta a)$ con $a \in [\mu]_1$ y, por consiguiente, $h(\mu b) \geq h(\eta b)$, lo cual ocurre si y sólo si $\mu b \leq \eta b$. ■

CAPÍTULO 2. LAS CLASES DE UN PREORDEN

2.1. Definición y propiedades básicas

2.2. Subconjuntos borrosos trapezoidales

Las clases de una relación borrosa heredan dos de sus propiedades básicas: la reflexividad y la T-transitividad, como se muestra en el apartado inicial del presente Capítulo. Además, son los T-estados lógicos más pequeños de entre aquellos que están normalizados. La utilización habitual en lógica fuzzy, o en control fuzzy, de los subconjuntos borrosos lineales a trozos ha planteado una reflexión sobre la posibilidad de obtenerlos como clases de algún tipo de relaciones borrosas. No siempre es posible obtener clases que sean subconjuntos borrosos lineales del tipo descrito, por ello en el segundo apartado describiremos una relación de indistinguibilidad que tiene como clases a todos los tipos de subconjuntos borrosos trapezoidales, incluyendo en esta categoría los números triangulares borrosos y los trapecios, tanto simétricos como asimétricos.

2.1. Definición y propiedades básicas

Dada una estructura relacional borrosa (X,R) se definen las clases modulo R como los subconjuntos borrosos[7]

$$\mu_a^R(b) = R(b/a).$$

Si R es reflexiva se verificará que $\mu_a(a) = 1$, es decir, las clases tendrán puntos. Se cumple además el siguiente resultado,

Teorema 2.2.1

R es transitiva si y sólo si $\mu_a \in T(X,R)$ para todo $a \in X$.

Demostración. $T(R(b/a),R(c/b)) \leq R(c/a)$ si y sólo si $T(\mu_a(b),R(c/b)) \leq \mu_a(c)$ para todo $a,b,c \in X$. ■

En particular para los T-preórdenes elementales I_μ^T sus clases serán estados lógicos con puntos. En el caso de éstos preórdenes las clases verifican las siguientes propiedades.

Teorema 2.2.2

Sea I_μ^T un T-preorden elemental, se verifica que $\mu \leq \mu_a$ para cualquier elemento $a \in X$. Además, se dará la igualdad $\mu = \mu_a$, para cierto $a \in X$, si y sólo si μ tiene puntos.

---

[7] Habitualmente omitiremos el superíndice sino da lugar a confusión.

Demostración. Siempre se verifica que $T(\mu a,\mu b)\leq\mu b$, luego $\mu b\leq I_{\mu}^{T}(b/a)=\mu_a b$ para todo $b\in X$. Si μ tiene puntos existirá al menos un $a\in X$ con $\mu a=1$, por tanto, $T(\mu a,I_{\mu}^{T}(b/a))=I_{\mu}^{T}(b/a)\leq\mu b$, es decir, $\mu_a b\leq\mu b$, luego $\mu_a=\mu$. ■

Teorema 2.2.3

Las clases de la estructura relacional (X,I_{μ}^{T}) forman una cadena.

Demostración. Se comprueba que $\mu_a\leq\mu_b$ si y sólo si $\mu b\leq\mu a$. En primer lugar, si $\mu_a\leq\mu_b$, entonces $I_{\mu}^{T}(c/a)\leq I_{\mu}^{T}(c/b)$ para todo $c\in X$, luego, tomando $c=a$, se tendrá que $I_{\mu}^{T}(a/a)=1\leq I_{\mu}^{T}(a/b)$ si y sólo si $\mu b\leq\mu a$.

Por otra parte, si $\mu b\leq\mu a$ implicará que $T(\mu b,z)\leq T(\mu a,z)$, luego, tomando supremos sobre z, se cumple que $I_{\mu}^{T}(c/a)\leq I_{\mu}^{T}(c/b)$. Como para todo para $a,b\in X$ es $\mu a<\mu b$ o $\mu a>\mu b$ o $\mu a=\mu b$, se sigue el resultado del teorema. ■

El siguiente teorema muestra que la clase μ_a es el subconjunto borroso más pequeño de entre aquellos estados lógicos que verifican $\mu a=1$.

Teorema 2.2.4

Sea (X,R) una estructura relacional, μ_a es el más pequeño de los T-estados lógicos μ que verifican $\mu(a)=1$.

Demostración. $T(\mu a,R(b/a))=T(1,R(b/a))=R(b/a)=\mu_a b\leq\mu b$ para todo $b\in X$,- luego $\mu_a\leq\mu$. ■

Corolario 2.2.5

Si R es un T-preorden borroso, entonces μ_a es el T-estado lógico más pequeño que «tiene» al punto a.

Si generalizamos las clases a un subconjunto M no vacío cualquiera mediante

$$\mu_M(b) = sup\,\{R(b/m) : m \in M\},$$

se obtienen resultados similares a los anteriores.

Teorema 2.2.6

Si T es una t-norma continua y R es una relación T-transitiva, μ_M es un T-estado lógico borroso para (X,R). Además si R es reflexiva, entonces $\mu_M(m) = 1$ para todo $m \in M$.

Demostración.

$$T(\mu_M a, R(b/a)) = T(\sup_{m \in M} R(a/m), R(b/a)) = \sup_{m \in M} T(R(a/m), R(b/a)) \leq$$

$$\leq \sup_{m \in M} R(b/m) = \mu_M b.$$

■

Teorema 2.2.7

μ_M es más pequeño que cualquier T-estado lógico μ cumpliendo $\mu(m) = 1$ para todo $m \in M$.

Demostración. Si $m \in M$, $T(\mu m, R(b/m)) = T(1, R(b/m)) = R(b/m) \leq \mu b$ para todo $b \in X$, luego, tomando supremos,

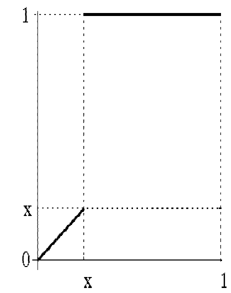
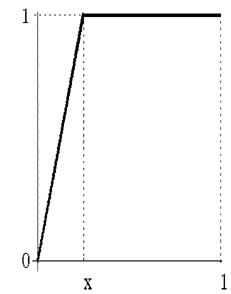
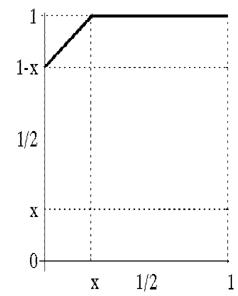
$$\sup_{m \in M} R(b/m) = \mu_M(b) \leq \mu(b).$$

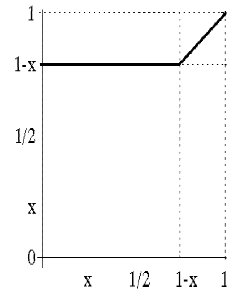
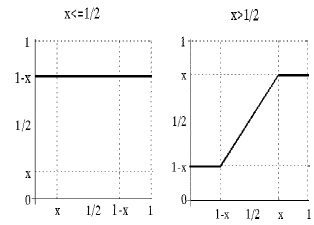
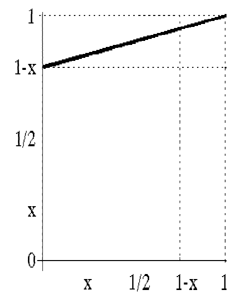
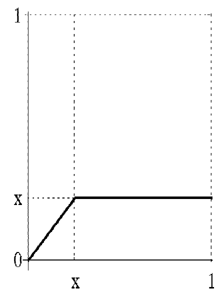
■

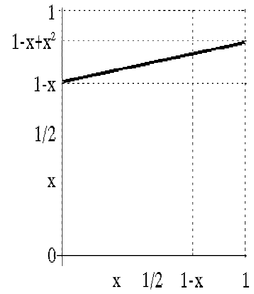
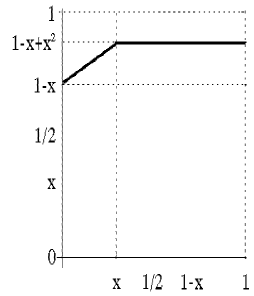
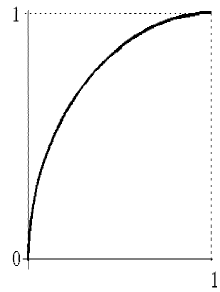
Corolario 2.2.8

Si R es un T-preorden borroso, μ_M es el T-estado lógico más pequeño de entre aquellos T-estados lógicos μ que contienen a M, es decir, que cumplan $\mu(m) = 1$ para todo $m \in M$.

En las siguientes figuras se muestran cómo son las clases μ_x de algunas de las relaciones borrosas más utilizadas en la literatura, todas ellas calculadas sobre el intervalo $[0,1]$.

<table>
<tr>
<td>Gödel-Brouwer</td>
<td>$\mu_x(y) = I^{Min}(y/x) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ y & x > y \end{cases}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Menger-Goguen</td>
<td>$\mu_x(y) = I^{\Pi}(y/x) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ \frac{y}{x} & x > y \end{cases}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Lukasiewicz</td>
<td>$\mu_x(y) = I^{W}(y/x) = Min(1, 1 - x + y)$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Kleene-Dienes	$\mu_x(y) = R^{KD}(y/x) = Max(1-x, y)$	
Willmot	$\mu_x(y) = R^{W}(y/x) =$ $= Max(1-x, Min(x,y))$	
Reichenbach	$\mu_x(y) = R^{r}(y/x) = 1 - x + xy$	
Mamdani	$\mu_x(y) = R^{m}(y/x) = Min(x,y)$	

<table>
<tr>
<td>Tipo Willmot</td>
<td>$\mu_x(y) = R_1^W(y/x) = 1 - x + x^2 y$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Tipo Willmot</td>
<td>$\mu_x(y) = R_2^W(y/x) = 1 - x + x\,Min(x, y)$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Yager</td>
<td>$\mu_x(y) = R^Y(y/x) = y^x$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

2.2. Subconjuntos borrosos trapezoidales

Los subconjuntos borrosos triangulares y trapezoidales han jugado un importante papel en las aplicaciones de la lógica fuzzy, y son mayoría los ejemplos de control borroso en los que se utilizan este tipo de funciones. En este apartado obtendremos una relación que permite definir los trapecios como clases de la misma.

Para la definición de subconjuntos borrosos trapezoidales consideraremos como universo X el conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Este hecho no supone una gran restricción puesto que es habitual utilizar $\mathbb{R}$ como universo base en la definición de subconjuntos borrosos que «representan» predicados borrosos a través de determinadas características numéricas de estos últimos. Por ejemplo, un subconjunto borroso que represente el predicado *alto*, sobre un universo de personas, se define mediante la altura de una persona, medida ésta en alguna escala numérica y que puede considerarse continua.

Definición 2.2.1

Un subconjunto borroso trapezoidal es un subconjunto borroso definido a partir de cuatro parámetros $[\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_2]$ como sigue

$$[\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_2](x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \alpha_1 \\ \frac{x-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1} & \text{si } \alpha_1 < x \leq \beta_1 \\ 1 & \text{si } \beta_1 < x \leq \beta_2 \\ \frac{x-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2} & \text{si } \beta_2 < x \leq \alpha_2 \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha_2 \end{cases}.$$

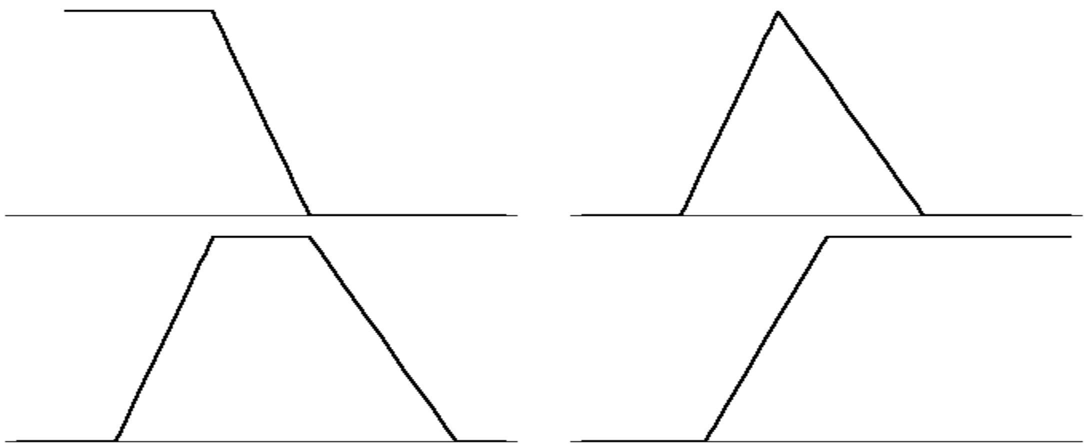


Figura 14.- Subconjuntos borrosos trapezoidales.

Los parámetros siempre verificarán la relación

$$\alpha_1 < \beta_1 \leq \beta_2 < \alpha_2,$$

salvo en un caso particular: cuando $\alpha_1 = \beta_1 = -\infty$ o $\beta_2 = \alpha_2 = +\infty$. De esta forma, la definición incluye los trapecios simétricos y asimétricos, los números triangulares simétricos y asimétricos y los trapecios «abiertos» por uno de sus extremos, tal como puede verse en la Figura 14.

Para obtener subconjuntos borrosos trapezoidales como clases de una relación, recordemos en primer lugar las definiciones de métrica generalizada [39, 54, 72] e indistinguibilidad [69, Apéndice].

Definición 2.2.2

Una aplicación $d: X \times X \rightarrow [0,1]$ es una T^*-métrica generalizada si y sólo si verifica para cualquier trío $a, b, c \in X$:

i) $d(a,a) = 0$,

ii) $d(a,b) = d(b,a)$ y

iii) $T^*(d(a,b), d(b,c)) \geq d(a,c)$,

siendo T^* una t-conorma.

Definición 2.2.3

Una relación borrosa $E:X\to[0,1]$ se dice que es una T-indistinguibilidad si y sólo si

i) E es un T-preorden y

ii) E es simétrica.

El siguiente teorema muestra cómo obtener una indistinguibilidad a partir de una métrica generalizada.

Teorema 2.2.4

Sea (X,d) un T^*-espacio métrico generalizado, se cumple que $R_d(b/a) = 1 - d(a,b)$ es una relación de T-indistinguibilidad, con T la t-norma dual asociada a T^* mediante la negación $N(x) = 1 - x$.

Demostración. Las propiedades reflexiva y simétrica son evidentes, la T-transitividad se demuestra de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T(R_d(b/a),R_d(c/b)) &= T(1-d(a,b),1-d(b,c)) = \\ &= 1-T^*(d(a,b),d(b,c)) \leq 1-d(a,c) = \\ &= R_d(c/a), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que T y T^* son duales y, por tanto, $T(1-x,1-y) = 1 - T^*(x,y)$.

Es interesante resaltar que si $d:X\times X\to\mathbb{R}^+$ es una métrica usual, el teorema anterior no puede ser aplicado a la restricción de d a $[0,1]$ definida como

$$d^*(a,b) = Min(1,d(a,b)),$$

ya que, aun verificando d^* las propiedades *i* y *ii*, no cumple la desigualdad triangular: se debería verificar que $T^*(d^*(a,b),\ d^*(b,c)) \geq d^*(a,c)$ y, basta tomar $d^*(a,c) > 1$ y $d^*(a,b), d^*(b,c)$ menores que 1 para que no se cumpla.

Para obtener una indistinguibilidad a partir de una métrica clásica podemos utilizar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.5

Si (X,d) es un espacio métrico clásico, la relación R_d definida como:

$R_d(b/a) = 1 - Min(1, d(f(a), f(b))) = Max(0, 1 - d(f(a), f(b))) = 1 \ominus d(f(a), f(b))$

es una W-indistinguibilidad para cualquier aplicación $f{:}X \rightarrow X$.

Demostración. Las propiedades reflexiva y simétrica son evidentes por las propiedades *i* y *ii* de las métricas, por tanto, es suficiente demostrar que R_d es W-transitiva,

$$
\begin{aligned}
&W(R_d(b/a), R_d(c/b)) = \\
&\quad = Max(0, 1 - Min(1, d(f(a), f(b))) + 1 - Min(1, d(f(b), f(c))) - 1) = \\
&\quad = Max(0, 1 - (Min(1, d(f(a), f(b))) + Min(1, d(f(b), f(c))))) \leq \\
&\quad \leq Max(0, 1 - Min(1, d(f(a), f(b)) + d(f(b), f(c)))) = \\
&\quad = 1 - Min(1, d(f(a), f(b)) + d(f(b), f(c))) \leq \\
&\quad \leq 1 - Min(1, d(f(a), f(c))) = \\
&\quad = R_d(c/a).
\end{aligned}
$$

■

Ejemplos 2.2.6

Si tomamos $X = \mathbb{R}$, $f = Id$ la función identidad, y d es una distancia real, se obtiene la W-indistinguibilidad

$$R_d(b/a) = 1 - Min(1, d(a,b))$$

y las clases

$$\mu_a(x) = 1 - Min(1, d(a,x))$$

que, como sabemos por el teorema 2.2.1, son W-estados lógicos borrosos de R_d. Las clases μ_a verifican:

— $\mu_a(x) = 0$ si y sólo si $Min(1, d(a,x)) = 1$ o $1 \leq d(a,x)$;

— $\mu_a(x) = 1$ si y sólo si $Min(1, d(a,x)) = 0$ o $d(a,x) = 0$ y que, si d separa puntos, conlleva $x = a$,

— $\mu_a(x) \in (0,1)$ si y sólo si $0 < d(a,x) < 1$, en cuyo caso $\mu_a(x) = 1 - d(a,x)$.

1. Con $d(a,b) = |b - a|$, las propiedades anteriores se interpretan como:

— $1 \leq |a - x|$ si y sólo si se cumple las dos condiciones siguientes: si $a \geq x$, entonces $1 \leq a - x$ y, si $a < x$, entonces $1 \leq x - a$; es decir, si $a \geq x$, entonces $x \leq a - 1$ y si $a < x$, entonces $a + 1 \leq x$;

— $|x - a| = 0$ si y sólo $x = a$;

— $0 < |x - a| < 1$ si y sólo si, cuando $x \geq a$, entonces $a < x < a + 1$ y cuando $x < a$, entonces $a - 1 < x < a$.

De este forma el W-estado lógico borroso μ_a es el subconjunto borroso triangular $[a-1, a, a, a+1]$ mostrado en la Figura 15.

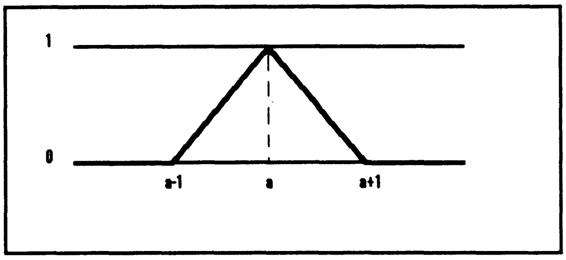


Figura 15.- Número triangular borroso.

2. Con $d(a,b)=\lambda\,|b-a|$ con $\lambda>0$, el subconjunto borroso obtenido será:

$$\mu_a=[a-\frac{1}{\lambda},a,a,a+\frac{1}{\lambda}]$$

que podría ser visto como el número borroso «alrededor de a» si $\lambda>1$.

3. Si $M=[a,b]$ y $d(x,y)=|y-x|$, de:

$$\mu_M(x)=\sup_{z\in M} R_d(x/z)=\sup_{z\in M}\,(1-Min(1,d(x,z)))=$$

$$=\sup_{z\in M} Max(0,1-d(x,z))=\sup_{z\in M} Max(0,1-|x-z|),$$

se obtiene que

$$\mu_M=[a-1,a,b,b+1].$$

4. Si consideramos la distancia $d(a,b)=|f(a)-f(b)|$ y se elige una función monótona adecuada f, es posible conseguir diferentes conjuntos borrosos trapezoidales mediante las clases. En este caso:

— $\mu_a(x)=0$ si y sólo si $|f(a)-f(x)|\geq 1$ y si f fuese no-decreciente se cumpliría que

· si $x\leq a$, entonces $f(x)\leq f(a)$, por lo que $\mu_a=0$ si y sólo si $f(a)-f(x)\geq 1$,

· y si $x\geq a$, entonces $f(x)\geq f(a)$, por lo que $\mu_a=0$ si y sólo si $f(x)-f(a)\geq 1$;

— $\mu_a(x)=1$ si y sólo si $|f(a)-f(x)|=0$ si y sólo si $f(x)=f(a)$,

— $0 < \mu_a(x) < 1$ si y sólo si $0 < |f(a) - f(x)| < 1$ y en ese caso, $\mu_a(x) = 1 - |f(a) - f(x)|$.

Es interesante resaltar que si $f' = f + k$ con k una constante, se obtienen los mismos conjuntos borrosos con f que con f'.

Algunos ejemplos de subconjuntos borrosos obtenidos como clases de indistinguibilidades de este tipo son:

4.1. Con $f_1(x) = kx$ resulta

$$\mu_a(x) = [a - \frac{1}{k}, a, a, a + \frac{1}{k}] .$$

4.2. Con $f_2(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \leq a \\ k'x - (k' - k)a & \text{si } x > a \end{cases}$ y siendo $k, k' > 0$, se obtiene

$$\mu_a = [a - \frac{1}{k}, a, a, a + \frac{1}{k'}]$$

que será un número triangular asimétrico como el que aparece en la Figura 16.

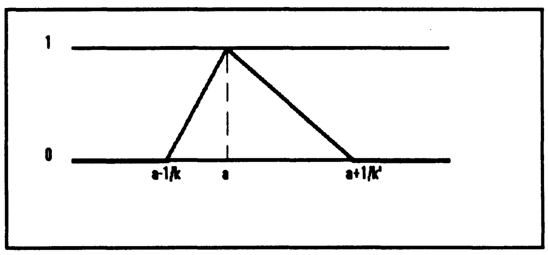


Figura 16.- Número triangular asimétrico.

4.3. Si $f_3(x) = \begin{cases} k(x - c_1) & \text{si } x < c_1 \\ 0 & \text{si } c_1 \leq x \leq c_2 \\ k(x - c_2) & \text{si } c_2 < x \end{cases}$ con $k > 0$, para cualquier a con

$c_1 \leq a \leq c_2$ se obtiene

$$\mu_a = [c_1 - \frac{1}{k}, c_1, c_2, c_2 + \frac{1}{k}],$$

un trapecio simétrico como el que aparece Figura 17.

5. Cuando se considera

$$f_4(x)=\begin{cases} k_1(x-c_1) & \text{si } x<c_1 \\ 0 & \text{si } c_1\le x\le c_2 \\ k_2(x-c_2) & \text{si } c_2<x \end{cases}$$

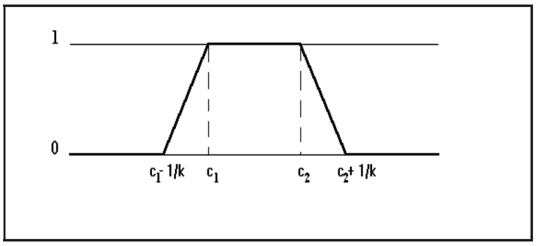


Figura 17.- Trapecio simétrico.

con $k_1,k_2>0$ y a verificando $c_1\le a\le c_2$, resulta

$$\mu_a=[c_1-\frac{1}{k_1},c_1,c_2,c_2+\frac{1}{k_2}],$$

que es un subconjunto borroso trapezoidal asimétrico como el que aparece en la Figura 18.

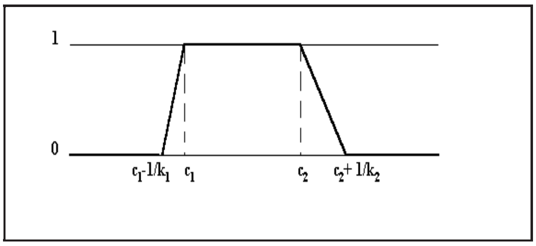


Figura 18.- Trapecio asimétrico.

6. Considerando $M=[c_1,c_2]$ y la función f_3, se tiene

$$\mu_M=[c_1-\frac{1}{k},c_1,c_2,c_2+\frac{1}{k}],$$

y con la función f_4 da

$$\mu_a=[c_1-\frac{1}{k_1},c_1,c_2,c_2+\frac{1}{k_2}],$$

de nuevo un trapecio asimétrico como el de la Figura 18.

La obtención de subconjuntos borrosos trapezoidales mediante clases de la W-indistinguibilidad definida a través de cierta función, se puede generalizar en el sentido del siguiente teorema y que permite una representación para los subconjuntos borrosos trapezoidales de la definición 2.2.1.

Teorema 2.2.7

Sea $\mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, μ es un subconjunto borroso trapezoidal si y sólo si existe una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua, lineal y estrictamente creciente, excepto para un intervalo $[\beta_1, \beta_2]$ donde es constante, tal que:

$$\mu(x) = \mu_a(x) = Max(0, 1 - |f(a) - f(x)|)$$

para cualquier punto $a \in [\beta_1, \beta_2]$.

Demostración.

Sea un trapecio $\mu = [\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_2]$ y consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \beta_1}{\beta_1 - \alpha_1} & \text{si } x \leq \beta_1 \text{ y } \beta_1 \neq -\infty \quad (0 \text{ si } \beta_1 = -\infty) \\ 0 & \text{si } \beta_1 \leq x \leq \beta_2 \\ \dfrac{x - \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \text{si } \beta_2 \leq x \text{ y } \beta_2 \neq +\infty \quad (0 \text{ si } \beta_1 = +\infty) \end{cases},$$

se verifica entonces que $\mu_a(x) = Max(0, 1 - |f(a) - f(x)|) = Max(0, 1 - |f(x)|)$ es igual a μ, tomando cualquier a con $\beta_1 \leq a \leq \beta_2$. Para demostrarlo, se deben distinguir tres partes dependiendo de los valores que tome μ_a.

1. $\mu_a(x) = 1$ si y sólo si $|f(x)| = 0$, y esto ocurrirá para todo $x \in [\beta_1, \beta_2]$, es decir, donde μ toma el valor 1. Si β_1 o β_2 fuese igual a $-\infty$ o a ∞ respectivamente, sucedería lo mismo, ya que la función tomaría el valor 0 para los valores menores que β_2, o mayores que β_1, dando lugar al valor 1 para μ_a.

2. $\mu_a(x) = 0$ si y sólo si $1 \leq |f(x)|$. Supongamos en primer lugar que β_1, β_2 son distintos de $-\infty$ e ∞, respectivamente, y sea $x < \beta_1 \leq a$, entonces, como $f(x) = \dfrac{\beta_1 - x}{\beta_1 - \alpha_1}$, será

$$1 \leq \frac{\beta_1 - x}{\beta_1 - \alpha_1} \Leftrightarrow \beta_1 - \alpha_1 \leq \beta_1 - x \Leftrightarrow -\alpha_1 \leq -x \Leftrightarrow \alpha_1 \geq x,$$

luego $\mu_a(x)=0$ si $x \leq \alpha_1$, lo cual es verdad también para μ; si es $a \leq \beta_2 < x$, por el mismo argumento se llega a que $\mu_a(x)=0$ si $\alpha_2 \leq x$, hecho que, de nuevo, es también cierto para μ.

Si $\beta_1 = -\infty$, entonces no existirá $x \leq \beta_1$, luego sólo se dará $\mu_a(x)=0$ para los $\alpha_2 \leq x$, lo que es igual para μ. De forma análoga se razonaría cuando $\beta_2 = \infty$.

3. Sea x tal que $\alpha_1 < x < \beta_1$, entonces μ_a vale

$$\mu_a(x) = 1 - |f(x)| = 1 - \frac{\beta_1 - x}{\beta_1 - \alpha_1} = \frac{\beta_1 - \alpha_1 - \beta_1 + x}{\beta_1 - \alpha_1} = \frac{x - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} = \mu(x).$$

Y para cuando $\beta_2 < x < \alpha_2$ se tendrá

$$\mu_a(x) = 1 - |f(x)| = 1 - \frac{\alpha_2 - x}{\alpha_2 - \beta_2} = \frac{\alpha_2 - \beta_2 - \alpha_2 + x}{\alpha_2 - \beta_2} = \frac{x - \alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} = \mu(x).$$

Recíprocamente, sea $\mu_a(x) = Max(0, 1 - |f(a) - f(x)|)$ para cierta función f en las condiciones del enunciado del teorema. Se debe comprobar que μ_a es un trapecio. Supongamos, por ahora, que $\beta_1 \neq -\infty$ y $\beta_2 \neq \infty$:

— f es constante en $[\beta_1, \beta_2]$ y $a \in [\beta_1, \beta_2]$, luego para todo $x \in [\beta_1, \beta_2]$ es $\mu_a(x) = 1$;

— tomemos $x < \beta_1 \leq a$, se cumplirá que $f(a) \geq f(x)$ por ser f no decreciente, y sea

$$\alpha_1 = sup\{x \in \mathbb{R}, x < \beta_1 : f(a) - f(x) \geq 1\},$$

que existirá, ya que se define sobre un conjunto de números reales no vacío, por ser f fuera de $[\beta_1, \beta_2]$ estrictamente creciente, y acotado superiormente. Es evidente que para todo $x \leq \alpha_1$ se verifica que $\mu_a(x) = 0$, puesto que

$|f(a)-f(x)| \geq 1$. Para $\alpha_1 < x < \beta_1$ será

$$\mu_a(x) = Max(0, 1 - |f(a)-f(x)|) = 1 - f(a) + f(x),$$

que es una función lineal y creciente con $\mu_a(\alpha_1) = 0$ y $\mu_a(\beta_2) = 1$;

— sea ahora $x > \beta_2 \geq a$, con lo que $f(a) < f(x)$. Se define

$$\alpha_2 = inf\{x \in \mathbb{R}, x > \beta_2 : f(x) - f(a) \geq 1\},$$

que de nuevo existirá por ser el conjunto no vacío y estar acotado inferiormente. Para todo $x \geq \alpha_2$ se verificará $\mu_a(x) = 0$ y para $\beta_2 < x < \alpha_2$ será

$$\mu_a(x) = 1 - f(x) + f(a),$$

que es una función lineal y decreciente con valores límite $\mu_a(\beta_2) = 1$ y $\mu_a(\alpha_2) = 0$.

Resumiendo, $\mu_a(x) = Max(0, 1 - |f(a)-f(x)|) = [\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_2]$.

Por último quedan por considerar los casos en el que $\beta_1 = -\infty$ o $\beta_2 = \infty$:

— si $\beta_1 = -\infty$ y $\beta_2 \neq \infty$ se tendrá que para todo $x \leq \beta_2$ es $\mu_a(x) = 1$ y, tomando α_2 como en el punto anterior, $\mu_a(x) = [-\infty, -\infty, \beta_2, \alpha_2]$;

— si $\beta_1 \neq -\infty$ y $\beta_2 = \infty$, de forma análoga será $\mu_a(x) = [\alpha_1, \beta_1, \infty, \infty]$;

— y, por último, si $\beta_1 = -\infty$ y $\beta_2 = \infty$ entonces $\mu_a \equiv 1$ y $\mu_a = [-\infty, -\infty, \infty, \infty]$.

■

En la Figura 19 pueden verse las funciones lineales a trozos, f, que generan los distintos tipos de subconjuntos borrosos trapezoidales mediante clases de la relación $R_f(y/x) = Max(0, 1 - |f(y) - f(x)|)$.

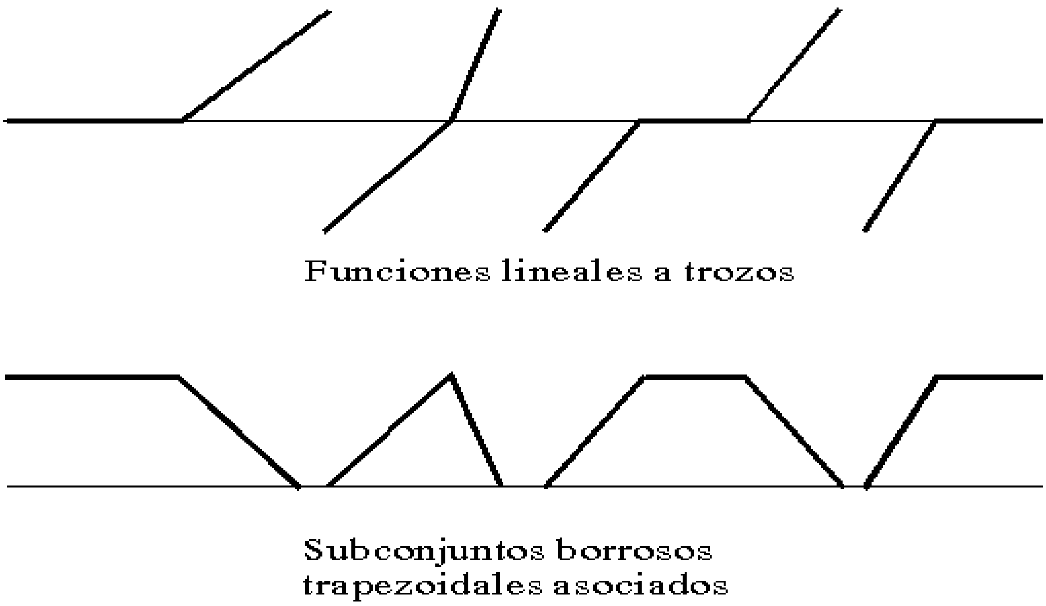


Figura 19. Funciones lineales a trozos y subconjuntos borrosos trapezoidales asociados.

$$R_f(y/x) = Max(0, 1 - |f(y) - f(x)|) .$$

CAPÍTULO 3. ESTADOS LÓGICOS CLÁSICOS

Que la lógica fuzzy contenga como caso límite a la lógica clásica bivaluada ha puesto en evidencia algunas cuestiones sobre la misma lógica clásica que antes no se apreciaban o no parecían relevantes. Un ejemplo de ello puede ser la multitud de funciones de implicación que pueden definirse en lógica borrosa, mientras que en la lógica clásica se considera una sola implicación: el condicional material. El razonamiento de sentido común no dispone de un único mecanismo para dar información condicionada. Muchos ejemplos de razonamiento no monótono ponen en evidencia este hecho [29]. Así, tanto la representación del conocimiento condicionado como las reglas de inferencia asociadas deben ser ampliadas. El objeto de este Capítulo es estudiar las relaciones clásicas en general, fundamentalmente en lo que concierne a la representación del conocimiento condicionado, junto con la regla del *modus ponens* y, por tanto, de los estados lógicos de la relación. Con ello se persiguen dos posibles aplicaciones: por una parte, estudiar las posibilidades de trasladar los conceptos aquí definidos al mundo de la lógica fuzzy y, en concreto, aplicarlos a los estados lógicos borrosos y, por otra, abrir nuevas posibilidades a desarrollos posteriores en la construcción de sistemas lógicos con relaciones no monótonas.

3.1. Estados lógicos irreducibles

En el presente apartado se consideran siempre estructuras relacionales clásicas del tipo $(X,\Rightarrow)$. El teorema de representación para preórdenes (teorema 1.1.7) permite obtener, por una parte, un preorden asociado a una clase de subconjuntos de X y, por otra, la clase de subconjuntos de X —los estados lógicos $L(X,\Rightarrow)$— que son cerrados bajo el *modus ponens* para un cierto preorden. Es posible que la relación $\Rightarrow$ no sea transitiva, o ni siquiera reflexiva, pero siempre se podrá calcular su cierre reflexivo $\underset{r}{\Rightarrow}$ o su cierre transitivo $\overset{t}{\Rightarrow}$. Es fácil comprobar que el cierre reflexivo de una relación tiene los mismos estados lógicos que ésta. En cambio esto no es cierto con el cierre transitivo, ya que por ejemplo las clases

$$[a,\Rightarrow) = \{b \in X : a \Rightarrow b\}$$

son siempre estados lógicos en una relación transitiva y, en cambio, no tienen por qué serlo en una relación no transitiva. Para un condicional material $\underset{V}{\rightarrow}$ el único estado lógico propio es el subconjunto V, lo que se verifica también para cualquier relación cuyo cierre reflexivo y transitivo sea un condicional material.

Teorema 3.1.1

La condición necesaria y suficiente para que el cierre reflexivo y transitivo de una relación $\Rightarrow$ sea el condicional material de cierto subconjunto propio $V \subset X$ es que el conjunto de estados lógicos propios se reduzca a V, es decir que se verifique que $L(X,\Rightarrow) = \{V\}$.

Demostración.

1. La condición es necesaria. En efecto:

Por hipótesis se cumple que $\Rightarrow \subset \overset{t}{\Rightarrow}_r \equiv \underset{V}{\rightarrow}$ y por consiguiente $V \in L(X,\Rightarrow)$. Tomando un estado lógico propio $V' \in L(X,\Rightarrow)$, para todo $a \in V'$, existirá un $b \in X - V'$, por ser V' propio y, por tanto, $a \not\Rightarrow b$, ya que V' es un estado lógico. Se verificará que $[a,\Rightarrow) \subseteq [a,\overset{t}{\Rightarrow}_r)$ y, como $[a,\overset{t}{\Rightarrow}_r)$ es un estado lógico del condicional material, sólo podrá ser igual a X o a V, pero no puede ser igual a X, ya que si fuese así, entonces $b \in [a,\overset{t}{\Rightarrow}_r)$ y, por tanto, existirían $a_1, \ldots, a_n \in X$ tal que $a \Rightarrow a_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_n \Rightarrow b$ con $a \in V'$, lo que conduciría a que $b \in V'$, dando lugar a una contradicción. Luego $[a,\overset{t}{\Rightarrow}_r) = V$, lo que implica que $V' \subseteq V$.

Para ver que $V' = V$, supongamos que existe $c \in V - V'$ y sea $a \in V'$; como $a, c \in V$ tendremos que $a \underset{V}{\rightarrow} c$ y, por la igualdad con el cierre transitivo, será $a \overset{t}{\Rightarrow}_r c$; por consiguiente, existirán $a_1, \ldots, a_n \in X$ tal que $a \Rightarrow a_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_n \Rightarrow c$ con $a \in V'$, lo que implicaría que $c \in V'$ en contra de lo supuesto. Así $V' = V$.

2. La condición es suficiente. En efecto:

Supongamos que $L(X,\Rightarrow) = \{V\}$ y sea $a \overset{t}{\Rightarrow}_r b$, si $a \in V$, entonces $b \in V$, por ser V estado lógico y si, por el contrario, $a \notin V$ evidentemente $(a,b) \in X - V \times X$; por tanto en ambos casos $a \underset{V}{\rightarrow} b$. Así, $\Rightarrow \subseteq \overset{t}{\Rightarrow}_r \subseteq \underset{V}{\rightarrow}$, relación que se cumple de forma inversa para el conjunto de estados lógicos

$$\{V\} = L(X,\underset{V}{\rightarrow}) \subseteq L(X,\overset{t}{\Rightarrow}_r) \subseteq L(X,\Rightarrow) = \{V\},$$

y, por ello, los estados lógicos propios del cierre reflexivo y transitivo de $\Rightarrow$ serán V. Como $\overset{t}{\Rightarrow}_r$ es un preorden será igual a $\overset{t}{\Rightarrow}_r = \bigcap_{V \in L(X,\overset{t}{\Rightarrow}_r)} \underset{V}{\rightarrow} = \underset{V}{\rightarrow}$.

■

Corolario 3.1.2

La condición necesaria y suficiente para que un preorden clásico sea el condicional material de cierto subconjunto propio V es que el conjunto de estados lógicos propios se reduzca a V.

Ejemplos 3.1.3

1. Sea (X,p) un álgebra de Boole probabilizada sobre la que se define la siguiente relación:

$$a \underset{p}{\Rightarrow} b \text{ si y sólo si } p(a)=0 \text{ o } p(a)>0 \text{ y } p(b/a)>0.$$

$\underset{p}{\Rightarrow}$ es claramente reflexiva, pero no es transitiva; para comprobarlo basta tomar $a,b,c \in X$ con $p(b/a)>0$, $p(c/b)>0$ y $p(c/a)=0$.

El conjunto $X^{+}=\{a \in X : p(a)>0\}$ es un estado lógico de $\underset{p}{\Rightarrow}$, ya que, si $a \in X^{+}$ y $a \underset{p}{\Rightarrow} b$, entonces $p(b/a)>0$ y, por tanto, $p(b)>0$ y $b \in X^{+}$. X^{+} será un estado lógico propio si existen elementos en el álgebra de Boole con probabilidad nula, verificándose, además en ese caso, que X^{+} es el único estado lógico propio de $(X,\underset{p}{\Rightarrow})$. Para comprobarlo, sea $V \in L(X,\underset{p}{\Rightarrow})$ y $a \in V$, si $p(a)>0$, entonces $a \in X^{+}$ y si $p(a)=0$ se cumplirá que $a \underset{p}{\Rightarrow} x$ para todo $x \in X$, luego $V=X$. Así, para todo $V \in L(X,\underset{p}{\Rightarrow})$, o $V \subseteq X^{+}$ o $V=X$, supongamos $V \neq X$ y tomemos $a \in X^{+}-V$ y $b \in V$; si se diese $b \underset{p}{\Rightarrow} a$, como $b \in V$ se tendrá que $a \in V$ por ser V un estado lógicos, llegando a una contradicción, luego dado $a \in X^{+}-V$, para todo $b \in V$, debe ser $p(a \cdot b)=0$, pero esto no es posible, ya que $b \underset{p}{\Rightarrow} a+b$ y, por tanto, $a+b \in V$ y $p(a(a+b))=p(a+ab) \geq p(a)>0$.

Se ha probado que $L(X,\underset{p}{\Rightarrow})=\{X^{+}\}$ y, por el teorema anterior, el cierre reflexivo y transitivo de la relación $\underset{p}{\Rightarrow}$ es el condicional material $\underset{X^{+}}{\rightarrow}$.

2. Dada una función $\mu : X \rightarrow [0,1]$ no nula sobre un conjunto X, se define la relación

$$a \underset{\mu}{\Rightarrow} b \text{ si y sólo si } \mu(a)=0 \text{ o } \mu(a)>0 \text{ y } \mu(b)>0.$$

Es fácil comprobar que $\underset{\mu}{\Rightarrow}$ es un preorden, cumpliéndose, además, que $L(X,\underset{\mu}{\Rightarrow}) = \{X^+\}$ y, en consecuencia, $\underset{\mu}{\Rightarrow}$ es el condicional material $\underset{X^+}{\rightarrow}$. En efecto, veamos que $X^+ \in L(X,\underset{\mu}{\Rightarrow})$. Antes que nada conviene señalar que X^+ es un subconjunto propio de X si, por una parte, existen elementos $a \in X^+$ con $\mu(a)=0$ y, por otra, μ no es idénticamente nula. Comprobar que X^+ es un estado lógico es sencillo puesto que si $a \in X^+$ y $a \underset{\mu}{\Rightarrow} b$, entonces $\mu(b)>0$ y $b \in X^+$.

Para demostrar que X^+ es el único estado lógico propio, tomemos un $V \in L(X,\underset{\mu}{\Rightarrow})$ y $a \in V$, se cumplirá que o $\mu(a)=0$ y, con ello, para todo $b \in X$ sería $a \underset{\mu}{\Rightarrow} b$ con lo que $V=X$; o $\mu(a)>0$ y, por tanto, $V \subseteq X^+$. Por otra parte, si existiera $a \in X^+ - V$ implicaría que $\mu(a)>0$ y, para todo $b \in V \subset X^+$, se tendría que $a \underset{\mu}{\Rightarrow} b$ y $b \underset{\mu}{\Rightarrow} a$, con lo que, utilizando esta última relación y con $b \in V$, conllevaría que $a \in V$, en contra de lo supuesto. Así, $V=X^+$. Por todo ello

$$\underset{\mu}{\Rightarrow} = \underset{X^+}{\rightarrow} .$$

El conjunto de estados lógicos, $L(X,\Rightarrow)$, de un preorden $\Rightarrow$ es el mayor conjunto para el cual se verifica el teorema de representación,

$$\Rightarrow = \bigcap_{V \in L(X,\Rightarrow)} \underset{V}{\rightarrow} .$$

Se estudia a continuación si es posible eliminar alguno de los estados lógicos, verificando, el subconjunto de ellos restante, el teorema de representación.

Definición 3.1.4

Denominaremos $\mathscr{E}$ al subconjunto del conjunto de estados lógicos formado por los $W \in L(X,\Rightarrow)$ que verifiquen:

$$\bigcap_{V\in L(X,\Rightarrow)-\{W\}} \underset{V}{\rightarrow} = \bigcap_{V\in L(X,\Rightarrow)} \underset{V}{\rightarrow} .$$

El siguiente resultado muestra una característica de los elementos de $\mathscr{E}$.

Teorema 3.1.5

Se cumple que $W\in\mathscr{E}$ si y sólo si existe un subconjunto de estados lógicos I tal que

$$\bigcap_{V_i\in I} \underset{V_i}{\rightarrow} \subseteq \underset{W}{\rightarrow} .$$

Demostración. Supongamos que $W\in\mathscr{E}$, abreviando $L(X,\Rightarrow)$ como L, se tendrá que:

$$\bigcap_{V\in L-\{W\}} \underset{V}{\rightarrow} = \bigcap_{V\in L} \underset{V}{\rightarrow} = (\bigcap_{V\in L-\{W\}} \underset{V}{\rightarrow}) \cap \underset{W}{\rightarrow}$$

lo que sucederá si y sólo si $\bigcap_{V\in L-\{W\}} \underset{V}{\rightarrow} \subseteq \underset{W}{\rightarrow}$, con lo que basta tomar $I=L-\{W\}$.

El recíproco es sencillo puesto que si existe $I\subseteq L$ con $\bigcap_{V_i\in I} \underset{V_i}{\rightarrow} \subseteq \underset{W}{\rightarrow}$ entonces

$$\bigcap_{V\in L} \underset{V}{\rightarrow} = (\bigcap_{V\in L-(I\cup W)} \underset{V}{\rightarrow}) \cap (\bigcap_{V_i\in I} \underset{V_i}{\rightarrow}) \cap \underset{W}{\rightarrow} = (\bigcap_{V\in L-(I\cup W)} \underset{V}{\rightarrow}) \cap (\bigcap_{V_i\in I} \underset{V_i}{\rightarrow}) =$$

$$= \bigcap_{V\in L-\{W\}} \underset{V}{\rightarrow} . \qquad \blacksquare$$

Es evidente que si para dos estados lógicos V,W se verifica $\underset{V}{\rightarrow}\subseteq\underset{W}{\rightarrow}$, entonces $W\in\mathscr{E}$ y W sería un estado lógico irrelevante por lo que al teorema de representación se refiere; pero, como se ha visto en el teorema 1.2.1.1, esto nunca ocurre con $V\neq W$. Analicemos cuándo ocurre que para V_1, ... V_n, $W\in L(X,\Rightarrow)$ se dé

$$\underset{V_1}{\rightarrow} \cap \ldots \cap \underset{V_n}{\rightarrow} \subseteq \underset{W}{\rightarrow} .$$

En primer lugar se deben considerar los siguientes resultados.

Teorema 3.1.6

Si $V_1,\ldots,V_n,W\in L(X,\Rightarrow)$ con $\underset{V_1}{\rightarrow}\cap,\ldots,\cap\underset{V_n}{\rightarrow}\subseteq\underset{W}{\rightarrow}$ y $W\cap V_1=\varnothing$, entonces $\underset{V_2}{\rightarrow}\cap,\ldots,\cap\underset{V_n}{\rightarrow}\subseteq\underset{W}{\rightarrow}$.

Demostración. Sea $(a,b)\in\underset{V_2}{\rightarrow}\cap,\ldots,\cap\underset{V_n}{\rightarrow}$ y $a\in W$, entonces $a\notin V_1$ y por tanto $a\underset{V_1}{\rightarrow}b$, luego $a\underset{W}{\rightarrow}b$. Si $a\notin W$ es evidente que $a\underset{W_1}{\rightarrow}b$ para todo $b\in X$, así $\underset{V_1}{\rightarrow}\cap, \ldots, \cap\underset{V_n}{\rightarrow}\subseteq\underset{W}{\rightarrow}$. ■

Teorema 3.1.7

Sean $V_1,\ldots,V_n,W\in L(X,\Rightarrow)$, si se verifica que $\underset{V_1}{\rightarrow}\cap,\ldots,\cap\underset{V_n}{\rightarrow}\subseteq\underset{W}{\rightarrow}$ entonces se cumple que

$$W\subseteq V_1\cup\ldots\cup V_n.$$

Demostración. Tomemos $a\in W$ y $a\notin\bigcup_{i=1}^{n}V_i$, se tendrá que para todo $b\notin W$ no es $a\underset{W}{\rightarrow}b$ pero si $a\underset{V_1}{\rightarrow}b$,..., $a\underset{V_n}{\rightarrow}b$, lo que es imposible. ■

Teorema 3.1.8

Se verifica que $\underset{V_1}{\rightarrow}\cap,\ldots,\cap\underset{V_n}{\rightarrow}\subseteq\underset{(\bigcup_{i=1}^{n}V_i)}{\rightarrow}$.

Demostración. Si no se da $a\underset{\bigcup_{i=1}^{n}V_i}{\rightarrow}b$ entonces es que $a\in\bigcup_{i=1}^{n}V_i$ y $b\notin\bigcup_{i=1}^{n}V_i$, por lo que existirá un i tal que $a\in V_i$ y $b\notin V_i$, lo que demuestra que

$$(\underset{\bigcup_{i=1}^{n}V_i}{\rightarrow})^c\subseteq(\underset{V_1}{\rightarrow})^c\cup,\ldots,\cup(\underset{V_n}{\rightarrow})^c,$$

deduciéndose el enunciado del teorema sin más que tomar complementarios. ■

Teorema 3.1.9

Se verifica que $\underset{V_1}{\rightarrow}\cap,\ldots,\cap\underset{V_n}{\rightarrow}\subseteq\underset{\bigcap_{i=1} V_i}{\rightarrow}$.

Demostración. Sea $(a,b)\in\underset{V_1}{\rightarrow}\cap,\ldots,\cap\underset{V_n}{\rightarrow}$, si $a\in\bigcap_{i=1}^{n} V_i$, entonces también $b\in\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ y por consiguiente $a\underset{\bigcap_{i=1} V_i}{\rightarrow} b$. Si $a\notin\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ es evidente que también $a\underset{\bigcap_{i=1} V_i}{\rightarrow} b$.

■

El teorema 3.1.6 indica que si $\underset{V_1}{\rightarrow}\cap,\ldots,\cap\underset{V_n}{\rightarrow}\subseteq\underset{W}{\rightarrow}$, para ciertos estados lógicos, podemos considerar que la intersección de W con cada V_i es distinta del vacío, puesto que la pertenencia a $\mathscr{E}$ de W no se verá afectada. Por otra parte, los teoremas 3.1.8 y 3.1.9 indican que tanto la unión como la intersección de estados lógicos pertenecen a $\mathscr{E}$, lo que para un estado lógico cualquiera parece indicar que dos situaciones son posibles. A la vista de estos resultados se considera la siguiente definición,

Definición 3.1.10

Un estado lógico $W\in L(X,\Rightarrow)$ se dirá que es reducible si y sólo si existen $V_1,V_2\in L(X,\Rightarrow)$ tales que $W\neq V_1$, $W\neq V_2$ y $W=V_1\cup V_2$. Se denotará mediante L_R al conjunto de estados lógicos reducibles.

Ejemplo 3.1.11

Sea $\mu:X\rightarrow[0,1]$ un subconjunto borroso definido sobre un universo X y considérese la relación

$$a\underset{\varepsilon}{\Rightarrow}b \text{ si y sólo si } Min(\mu a,\mu b)\geq\varepsilon.$$

Sea V un estado lógico de $\underset{\varepsilon}{\Rightarrow}$, pueden darse dos posibilidades, para cada elemento a de V:

— si a es tal que $\mu a \geq \varepsilon$, entonces V contendrá a todos los elementos $b \in X$ tales que $\mu b \geq \varepsilon$, sea

$$\{[\varepsilon, 1]\} = \{b \in X : \mu b \geq \varepsilon\}$$

el conjunto de todos ellos. Al ser $Min(\mu a, \mu b) \geq \varepsilon$ para todo $b \in \{[\varepsilon, 1]\}$, se dará $a \underset{\varepsilon}{\Rightarrow} b$ y, por tanto, $\{[\varepsilon, 1]\} \subseteq V$;

— si, por el contrario, a, es tal que $\mu a < \varepsilon$ entonces no existirá $b \in X$ tal que $a \underset{\varepsilon}{\Rightarrow} b$ y a estará «aislado».

Con todo lo dicho, basta tomar $V = \{a\} \cup \{[\varepsilon, 1]\}$ con a verificando $\mu a < \varepsilon$, para que V, $W_1 = \{a\}$ y $W_2 = \{[\varepsilon, 1]\}$ sean estados lógicos de $\underset{\varepsilon}{\Rightarrow}$, cumpliendo $V = W_1 \cup W_2$. De esta forma V será reducible y, es inmediato probar, que W_1 es irreducible. En cuanto a W_2 también será irreducible sin más que exigir alguna condición de continuidad a μ.

Se verifican los siguientes teoremas.

Teorema 3.1.12

Si $W \in L_R$ con $W = V_1 \cup V_2$, entonces $\underset{V_1}{\rightarrow} \cap \underset{V_2}{\rightarrow} \subseteq \underset{W}{\rightarrow}$.

Demostración. Basta con aplicar el teorema 3.1.8. ■

El recíproco del teorema anterior también se verifica añadiendo una condición.

Teorema 3.1.13

Si $V_1, V_2, W \in L(X, \Rightarrow)$ con $\underset{V_1}{\rightarrow} \cap \underset{V_2}{\rightarrow} \subseteq \underset{W}{\rightarrow}$ y verificando que $W \not\subset V_1$ y $W \not\subset V_2$, entonces W es reducible con $W = V_1 \cup V_2$.

Demostración. Por el teorema 3.1.7 se cumple que $W \subseteq V_1 \cup V_2$. Supongamos que $W \subsetneq V_1 \cup V_2$ y sea $a \in W \subset V_1 \cup V_2$ tal que $a \notin V_1 \cap V_2$, que existirá ya que sino $W \subset$

$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1$, lo cual es contradictorio con la hipótesis del teorema. Consideremos que $a \in V_1$ y $a \notin V_2$ —el caso contrario es análogo—, si existe $b \in V_1$ y $b \notin W$ llegaríamos a que no $a \underset{W}{\rightarrow} b$ pero $a \underset{V_1}{\rightarrow} b$ y $a \underset{V_2}{\rightarrow} b$ lo que es absurdo, por tanto no debe existir b, lo cual implica que $V_1 \subsetneq W$. Tomemos $c \in W$ y $c \notin V_1$, con lo que $c \in V_2$, si existe un elemento $d \in X$ con $d \in V_2$ y $d \notin W$, entonces $(c,d) \notin \underset{W}{\rightarrow}$ y $c \underset{V_1}{\rightarrow} d$ y $c \underset{V_1}{\rightarrow} d$, lo que contradice la hipótesis del teorema; si no existe un elemento d en las condiciones exigidas es que $V_2 \subset W$ y como $V_1 \subset W$ por hipótesis, se daría $V_1 \cup V_2 \subset W \subset V_1 \cup V_2$ lo que contradice la suposición de que $W \neq V_1 \cup V_2$. ■

Corolario 3.1.14

$W \in L$ es reducible con $W = V_1 \cup V_2$ si y sólo si se cumple que $\underset{V_1}{\rightarrow} \cap \underset{V_2}{\rightarrow} \subseteq \underset{W}{\rightarrow}$ con $W \not\subset V_1$ y $W \not\subset V_2$.

El conjunto de estados lógicos irreducibles, $L_{IR} = L_R^c$, genera el mismo preorden que el conjunto total, L, de estados lógicos.

Teorema 3.1.15

Se cumple la siguiente igualdad:

$$\bigcap_{V \in L} \underset{V}{\rightarrow} = \bigcap_{W \in L_{IR}} \underset{W}{\rightarrow}.$$

Demostración. Es evidente que se verifica

$$\bigcap_{V \in L} \underset{V}{\rightarrow} \subseteq \bigcap_{W \in L_{IR}} \underset{W}{\rightarrow}.$$

Si no se diese la desigualdad contraria, conllevaría la existencia de un par (a,b) con $a \underset{W}{\rightarrow} b$, para todo estado lógico irreducible W, pero existiría al menos un estado V reducible tal que no sería $a \underset{V}{\rightarrow} b$. Al ser V reducible, existirán W_1, W_2, distintos de V, tales que $V = W_1 \cup W_2$. Los estados lógicos W_i con $i = 1,2$, pueden ser irreducibles o no, en todo caso, siempre podemos descomponer V como unión de irreducibles de la forma

$$V = W_1 \cup \ldots \cup W_n,$$

con W_i, $i = 1, \ldots, n$, irreducibles. Ahora, por el teorema 3.1.8 tendremos que

$$\underset{W_1}{\rightarrow} \cap \ldots \cap \underset{W_n}{\rightarrow} \subseteq \underset{V}{\rightarrow}.$$

De esta forma, es imposible que exista un par (a, b) con $a \underset{W}{\rightarrow} b$ para todo estado lógico irreducible W y que exista V reducible tal que no sea $a \underset{V}{\rightarrow} b$. ■

Ejemplo 3.1.16

La relación definida en el ejemplo 3.1.11 no es reflexiva, en general, pero si es transitiva. Podemos tomar su cierre reflexivo $\overset{r}{\underset{\varepsilon}{\Rightarrow}}$ y obtener un preorden. Tomando como universo $X = [0, 1]$, como subconjunto borroso μ la identidad y un ε arbitrario entre cero y uno, se tendrá que los estados lógicos irreducibles de $\underset{\varepsilon}{\Rightarrow}$ son: o los singletones $V_x = \{x\}$ para cada $x \in [0, 1]$ tal que $\mu x < \varepsilon$; o el conjunto $[\varepsilon, 1]$. Por tanto,

$$\overset{r}{\underset{\varepsilon}{\Rightarrow}} = \Big(\bigcap_{x \in \{[0, \varepsilon)\}} \underset{\{x\}}{\rightarrow} \Big) \cap \underset{\{[\varepsilon, 1]\}}{\rightarrow}.$$

Hemos visto que si W es reducible es un estado lógico que podemos eliminar sin que el teorema de representación falle por ello. Veamos otros casos que también pueden aparecer.

Teorema 3.1.17

Si $V_1, V_2, W \in L(X,\Rightarrow)$ y $\underset{V_1}{\rightarrow} \cap \underset{V_2}{\rightarrow} \subseteq \underset{W}{\rightarrow}$ con $W \subsetneq V_1$, entonces $W = V_1 \cap V_2$.

Demostración. Veamos que $W \subsetneq V_2$. Si existiese $a \in W \subset V_1$ con $a \notin V_2$, tomando $b \in V_1$ y $b \notin W$ llegaríamos a que $(a,b) \notin \underset{W}{\rightarrow}$ y $(a,b) \in \underset{V_1}{\rightarrow} \cap \underset{V_2}{\rightarrow}$. Por tanto, no debe existir a, esto implica que $W \subset V_2$ y, como $W \subset V_1$, tendremos $W \subseteq V_1 \cap V_2$; si W fuese distinto a $V_1 \cap V_2$ basta con tomar $a \in W$ y $b \in V_1 \cap V_2$ con $b \notin W$, para tener, de nuevo, que $a \underset{V_1}{\rightarrow} b$, $a \underset{V_2}{\rightarrow} b$ y $(a,b) \notin \underset{W}{\rightarrow}$, en contra de la hipótesis del teorema. ■

Ejemplo 3.1.18

En el ejemplo 1.1.9 de la página 31, definimos la relación

$$x \overset{\varepsilon}{\underset{\mu}{\Rightarrow}} y \text{ si y sólo si } Max(1-\mu(x), \mu(y)) \geq \varepsilon .$$

Tomemos, al igual que allí, $X = [0,1]$ y $\mu = Id$, pero considerando ahora $\varepsilon > \frac{1}{2}$. Veamos como son los estados lógicos de esta relación. Sea V uno de ellos no vacío, y $x \in V$. Es evidente que[8] $x \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} y$ para todo $y \geq \varepsilon$, puesto que $Max(1-x, y) \geq y \geq \varepsilon$, de esta forma siempre $[\varepsilon, 1] \subseteq V$. Si existe $x \in V$ con $x \leq 1-\varepsilon$, se tendría que $1-x \geq \varepsilon$ y, entonces, $x \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} y$ para todo $y \in [0,1]$, con lo que $V = [0,1]$. Los elementos $y \in [\varepsilon, 1]$ nunca verificarán que $1-y \geq \varepsilon$, ya que $\frac{1}{2} < \varepsilon \leq y$ y, por tanto, $\varepsilon > \frac{1}{2} > 1-\varepsilon \geq 1-y$. En resumen, los estados lógicos propios de $\overset{\varepsilon}{\Rightarrow}$ son de la forma

$$V = [\varepsilon, 1] \cup W \text{ con } W \subseteq (1-\varepsilon, \varepsilon).$$

Tomando $W = [\varepsilon, 1]$, $V_1 = [\varepsilon, 1] \cup \{x\}$ y $V_2 = [\varepsilon, 1] \cup \{y\}$ con $x, y \in (1-\varepsilon, \varepsilon)$ y distintos, tendremos tres estados lógicos irreducibles, ya que ni $\{x\}$ ni $\{y\}$ son estados lógicos, verificando

$$W = V_1 \cap V_2 .$$

Teorema 3.1.19

[8] Omitimos el subíndice por ser la función identidad.

Sea $W\in L_{IR}$ y $\underset{V_1}{\to}\cap\ldots\cap\underset{V_n}{\to}\subseteq\underset{W}{\to}$, entonces existe $J\subseteq I=\{1,\ldots,n\}$ tal que

$$W=\bigcap_{j\in J}V_j.$$

Demostración. Es evidente que se cumple que

$$\bigcup_{i\in I}(W\cap V_i)=W\cap(\bigcup_{i\in I}V_i)=W,$$

puesto que $W\subseteq\bigcup_{i\in I}V_i$ por el teorema 3.1.8. Como se puede suponer que $W\cap V_i\neq\emptyset$ para todo $i\in I$ gracias al teorema 3.1.6, tendremos que tener que existe $J\subseteq I$ distinto del vacío —basta con ir eliminando los $i\in I$ con $V_i\cap W\subsetneq W$— tal que $\bigcup_{i\in J}(W\cap V_i)=W$ y $\bigcup_{i\in I-J}(W\cap V_i)\subsetneq W$, ya que sino W sería reducible, lo que implica que $W\subseteq\bigcap_{i\in J}V_i$. Veamos que se da la igualdad. Si no fuese así, como

$$\bigcup_{i\in I-J}(V_i\cap W)\subsetneq W\subsetneq\bigcap_{j\in J}V_j,$$

podríamos tomar, por una parte, $a\in W$ y $a\notin\bigcup_{i\in I-J}(V_i\cap W)=(\bigcup_{i\in I-J}V_i)\cap W$ con lo que $a\notin\bigcup_{i\in I-J}V_i$; y, por otra, un $b\in\bigcap_{j\in J}V_j$ con $b\notin W$, con lo que se tendría que no $a\underset{W}{\to}b$ y $a\underset{V_i}{\to}b$ para todo $i\in I$ en contra de la hipótesis del teorema. Así, $W=\bigcap_{j\in J}V_j$.

Si denotamos por $\mathscr{E}_n$ al conjunto de estados lógicos W para los cuales existe un número finito de estados lógicos $V_1,\ldots,V_n$ tal que

$$\underset{V_1}{\to}\cap\ldots\cap\underset{V_n}{\to}\subseteq\underset{W}{\to},$$

el siguiente teorema caracteriza a los elementos de $\mathscr{E}_n$.

Teorema 3.1.20

Un estado lógico W pertenece a $\mathscr{E}_n$ si y sólo si existe un conjunto finito de estados lógicos $\{V_i\}_{i\in I}$ tal que se da una de las dos condiciones siguientes

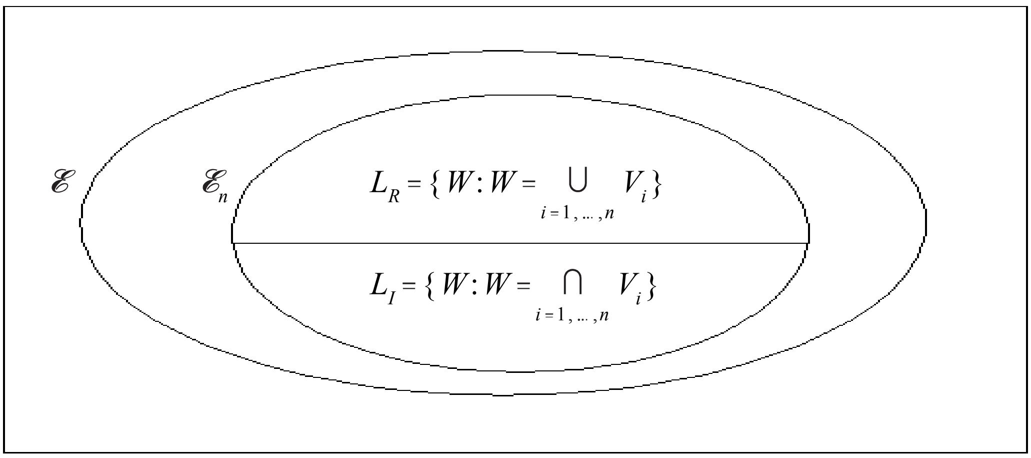
1. $W = \bigcup_{i\in I} V_i$, o
2. $W = \bigcap_{i\in I} V_i$.

Demostración. Si $W\in\mathscr{E}_n$ existirá un conjunto finito de estados lógicos $\{V_i\}_{i\in I}$ tal que $\to_{V_1}\cap\ldots\cap\to_{V_n}\subseteq\to_W$, pudiéndose suponer que $V_i\cap W\neq\emptyset$ para todo $i\in I$. Sabemos que $\bigcup_{i\in I}(V_i\cap W) = W$ por el teorema 3.1.7, si $V_i\cap W \subsetneq W$ para todo i, entonces W es reducible con $(V_1\cap W)\cup(\bigcup_{i\in I-1}(V_i\cap W)) = W$ y $V_i\cap W$ son estados lógicos, dándose la condición **1.** Si por el contrario existe un $i\in I$ tal que $V_i\cap W = W$, tomando J como el conjunto de índices más pequeño tal que $\bigcup_{i\in I} V_i\cap W = W$ y $\bigcup_{i\in I-J} V_i\cap W \subsetneq W$, por el teorema 3.1.19 $W = \bigcap_{i\in J} V_i$.

■

El siguiente gráfico resume los resultados obtenidos.

$L(X,\Rightarrow)$



3.2. Estados lógicos minimales

La intersección de dos estados lógicos siempre es un estado lógico, aunque puede ser vacío. Veamos si existen estados lógicos que no contengan a otro sobre una estructura relacional $L(X,\Rightarrow)$ cualquiera.

Definición 3.2.1

Un estado lógico propio $V \in L(X,\Rightarrow)$ se dice minimal si y sólo si no existe otro $W \in L(X,\Rightarrow)$ tal que $W \subsetneq V$.

Teorema 3.2.2

Si $V \in L(X,\Rightarrow)$ es minimal entonces es irreducible.

Demostración. Si fuese reducible entonces $V = W_1 \cup W_2$ para dos estados lógicos W_1, W_2 con $V \not\subset W_1$ y $V \not\subset W_2$ y por tanto $W_1, W_2 \subsetneq V$. ■

Ejemplo 3.2.3

En el ejemplo 3.1.18 del apartado anterior tenemos que

$$V_1 = [\varepsilon, 1] \cup \{x\}$$

es un estado lógico no minimal ya que contiene al estado lógico $W = [\varepsilon, 1]$.

Si la relación es simétrica sobre V, entonces se verifica la implicación contraria.

Teorema 3.2.4

Si la relación $\Rightarrow$ restringida a V ($\Rightarrow|_V$) es simétrica, entonces V es irreducible si y sólo si es minimal.

Demostración. Por el teorema anterior si V es minimal entonces es irreducible. Supongamos ahora que V no es minimal y veamos que es reducible. Sea $W \in L(X,\Rightarrow)$ con $W \subsetneq V$, entonces $V-W$ es un estado lógico propio de $\Rightarrow$, ya que si $a \in V-W$ y $a \Rightarrow b$, entonces $b \in V$, por ser V un estado lógico; pero, además, $b \notin W$ puesto que si $b \in W$ como $b \Rightarrow a$, por ser simétrica $\Rightarrow$ sobre V, tendríamos $a \in W$, por ser W estado lógico, lo cual es una contradicción con $a \notin W$, de esta forma $b \in V-W$ y $V-W$ es un estado lógico. Por consiguiente, V se descompone como $V = W \cup (V-W)$.

■

Para estudiar los estados lógicos minimales, se definen los siguientes conjuntos para cada $a \in X$:

$$V_a = \{a\} \cup \{b \in X : \exists\, b_1, b_2, \ldots, b_n \in X,\ n \geq 0,\ \text{con } a \Rightarrow b_1, b_1 \Rightarrow b_2, \ldots, b_n \Rightarrow b\}$$

Algunas propiedades interesantes de los conjuntos V_a son las siguientes:

Proposición 3.2.5

Para todo $a \in X$, V_a es un estado lógico.

Demostración. Sea $b \in V_a$ y $b \Rightarrow c$, si $b = a$, entonces se cumplirá que $c \in V_a$ sin más que considerar una cadena de cero elementos y si $b \neq a$, existirán $b_1, \ldots, b_n \in X$ tales que $a \Rightarrow b_1, b_1 \Rightarrow b_2, \ldots, b_n \Rightarrow b$, con lo que se tendrá que $c \in V_a$, al considerar la cadena $b_1, \ldots, b_n, b \in X$. ■

Proposición 3.2.6

Si $V \in L(X,\Rightarrow)$ y $a \in V$, entonces $V_a \subseteq V$.

Demostración. Sea $b \in V_a$, si $b = a$, entonces $b \in V$ trivialmente y si $b \neq a$, existirán entonces $b_1, \dots, b_n \in X$ tales que $a \Rightarrow b_1, b_1 \Rightarrow b_2, \dots, b_n \Rightarrow b$, como $a \in V$ y V es un estado lógico, se cumplirá que $b_1, \dots, b_n, b \in V$. ■

Corolario 3.2.7

Si $a \Rightarrow b$, entonces $V_b \subseteq V_a$.

Demostración. Si $a \Rightarrow b$, entonces $b \in V_a$, luego $V_b \subseteq V_a$. ■

Corolario 3.2.8

Si $a \Rightarrow b$ y $b \Rightarrow a$, entonces $V_a = V_b$.

El recíproco de este último corolario no es cierto, ya que tomando $X = \{a, b, c\}$ y $\Rightarrow = \{(a,c), (c,a), (b,c), (c,b)\}$ se verifica que $V_a = V_b = \{a,b,c\}$ y sin embargo no es $a \Rightarrow b$ ni $b \Rightarrow a$.

Teorema 3.2.9

Para todo $V \in L(X, \Rightarrow)$ se verifica que $V = \bigcup_{a \in V} V_a$.

Demostración. En efecto, por la proposición 3.2.6, para todo $a \in V$ es $V_a \subseteq V$, luego $\bigcup_{a \in V} V_a \subseteq V$ y como para todo $a \in V$ es $a \in V_a$, se verificará $V \subseteq \bigcup_{a \in V} V_a$. ■

Teorema 3.2.10

$V \in L(X, \Rightarrow)$ es minimal si y sólo si, para todo $a \in V$, $V_a = V$.

Demostración. Como $V = \bigcup_{a \in V} V_a$ tendremos que para todo $a \in V$ es $V_a \subseteq V$, luego si V es minimal, $V_a = V$. Se debe de observar que V_a nunca es vacío.

Para la condición suficiente, si existe $W \in L(X, \Rightarrow)$ con $W \subsetneq V$, se tendrá que $W = \bigcup_{a \in W} V_a \subset V = \bigcup_{a \in V} V_a$ y, por tanto, existe $a \in W \subset V$ tal que $V_a \subseteq W \subsetneq V$. ■

Corolario 3.2.11

Si el cardinal de V es mayor o igual que 2, entonces V es minimal si y sólo si para todo par de elementos $a, b \in V$ existen $b_1, \ldots, b_n \in X$ tales que $a \Rightarrow b_1, b_1 \Rightarrow b_2, \ldots,$ $b_n \Rightarrow b$.

Demostración. Si V es minimal entonces para todo $a, b \in V$ es $V_a = V_b = V$, luego $b \in V_a$. Recíprocamente, sea $a \in V$, para todo $b \in V$ existirán $b_1, \ldots, b_n \in X$ con $a \Rightarrow b_1$ $, b_1 \Rightarrow b_2, \ldots, b_n \Rightarrow b$; por tanto $b \in V_a$ y $V \subseteq V_a$, luego $V = V_a$ para todo $a \in V$. ■

Corolario 3.2.12

Si V es minimal entonces o bien $V = \{a\}$ o bien para todo $a \in V$ existen $b_1, \ldots, b_n$ $\in X$ tales que $a \Rightarrow b_1, b_1 \Rightarrow b_2, \ldots, b_n \Rightarrow a$.

Demostración. Supongamos $\# V \geq 2$. Para todo $b \in V$ tendremos que $b \in V_a$, luego existirán $b_1, \ldots, b_n \in X$ tales que $a \Rightarrow b_1, b_1 \Rightarrow b_2, \ldots, b_n \Rightarrow b$; pero también tendremos que $a \in V = V_b$, por lo que existirán $b'_1, \ldots, b'_m \in X$ tales que $b \Rightarrow b'_1, b'_1 \Rightarrow b'_2, \ldots, b'_m \Rightarrow a$. Así existen $b_1, \ldots, b_n, b'_1, \ldots, b'_m \in X$ tales que $a \Rightarrow b_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow b'_m \Rightarrow a$. ■

Teorema 3.2.13

V_a es minimal si y sólo si, para todo $b \in V_a$, se cumple que $a \in V_b$.

Demostración. Si existe $b \in V_a$ tal que $a \notin V_b$, entonces como $V_b \subseteq V_a$ y $V_b \neq V_a$ tendremos $V_b \subsetneq V_a$ y V_a no sería minimal.

Para la condición suficiente, si para todo $b \in V_a$ es $a \in V_b$, supongamos que exista un estado lógico propio tal que $V \subseteq V_a$ y sea $b \in V$, por la proposición 3.2.6 sabemos que $V_b \subseteq V_a$ y, además, por hipótesis $a \in V_b$, luego, por la misma proposición, $V_a \subseteq V_b$ y, así, $V_a = V_b$; como $b \in V$, será $V_b \subseteq V$ y, por lo tanto $V_b \subseteq V \subseteq V_a = V_b$, con lo que $V = V_a$, y V_a será minimal. ■

Teorema 3.2.14

Ningún estado lógico del tipo V_a que sea no minimal es unión de estados lógicos minimales.

Demostración. Sea V_a no minimal, si $V_a = \bigcup_{i \in I} V_i$ con V_i minimales, como $a \in V_a$, existirá un $i \in I$ tal que $a \in V_i$, se verifica entonces que $V_a \subseteq V_i$, por ser V_i estado lógico y, como $V_i \subseteq V_a$, tendremos que $V_a = V_i$, con lo que V_a sería minimal. ■

Teorema 3.2.15

Si V_a no es minimal, a no pertenece a ningún estado lógico minimal.

Demostración. Por ser V_a no minimal existe $V \in L(X, \Rightarrow)$ tal que $V \subsetneq V_a$, si $a \in W$, con W un estado lógico, tendremos $V \subsetneq V_a \subseteq W$ y, por tanto, W no será minimal. ■

Corolario 3.2.16

Un estado lógico V es unión de minimales si y sólo si para todo $a \in V$, V_a es minimal.

Demostración. La condición suficiente es trivial. Para la necesaria consideremos que si existe $a \in V$ tal que V_a no es minimal, por el teorema anterior a no pertenece a ningún estado lógico minimal. ■

A la vista de los resultados obtenidos, los estados lógicos minimales se caracterizan por tener todos sus elementos conectados mediante una cadena de pares relacionados a través de $\Rightarrow$. Por otra parte, los estados lógicos V_a, que serían las clases de un elemento se la relación fuese un preorden, son los que permiten determinar cuándo un estado lógico cualquiera V es unión de estados lógicos minimales, hecho que sucede tan sólo cuando los mismos V_a son minimales para todo elemento $a \in V$.

PARTE II. REPRESENTACIÓN DE PREDICADOS VAGOS

CAPÍTULO 4. LA EXTENSIÓN DE UN PREDICADO BORROSO

Dos elementos son básicos para la construcción de un sistema lógico borroso: la representación de los términos lingüísticos vagos que deban considerarse, y que dan lugar a proposiciones atómicas, y la representación de las conectivas lógicas, que permitan construir proposiciones lógicas compuestas. Existen muchos tipos de términos lingüísticos vagos en el lenguaje natural; por ejemplo, hay adjetivos vagos tales como *alto*, *guapo*, *rico*, *vago*, etc., hay adverbios como *cerca*, *lejos*, *mucho*, *poco*, *bastante*, etc., o incluso sustantivos, puesto que conceptos como *silla* pueden ser borrosos. Las proposiciones atómicas que se consideran habitualmente en lógica fuzzy son del tipo «*x es P*», donde x es un elemento del universo del discurso y P es un término lingüístico vago que se puede aplicar a los elementos de X. Las investigaciones en lógica fuzzy sobre la representación de estos dos elementos, los términos lingüísticos vagos y las conectivas lógicas, han discurrido de forma más o menos independiente. Los términos vagos se representan mediante subconjuntos borrosos, generalmente valorados sobre $[0,1]$, siendo muchos los estudios que abordan el problema de cómo realizar la identificación entre un término lingüístico vago y un subconjunto borroso determinado [28, 44, 100, 101]. Las conectivas lógicas se definen como operadores, unarios o binarios, sobre $[0,1]$. Estas conectivas se aplican, generalmente de forma funcional, al grado de pertenencia de los elementos al subconjunto borroso, sin tener en cuenta la interpretación que del subconjunto borroso se esté realizando [7, 91]. Esta visión ha dado lugar a considerar distintas estructuras algebraicas que modelicen el comportamiento de las conectivas lógicas apropiadas para la lógica fuzzy. Sin embargo, esta lógica presenta un carácter fuertemente local. En primer lugar, la representación de términos vagos mediante subconjuntos borrosos depende estrechamente del universo de discurso: es evidente que *alto* no tiene el mismo referente en distintas poblaciones humanas. En segundo lugar, los distintos sistemas de conectivas lógicas cumplen propiedades diversas, dando lugar a diferentes sistemas lógicos que pueden ser apropiados o no. Estos argumentos dan fuerza a la idea de que las conectivas lógicas en un sistema fuzzy puedan depender de la interpretación que le demos a los subconjuntos borrosos. De hecho, las leyes de la lógica clásica parten de establecer, previamente, que las proposiciones sólo pueden tomar dos valores de verdad y, por consiguiente, las conectivas se definen describiendo las condiciones bajo las cuales una proposición no atómica es verdadera. Análogamente, en lógica fuzzy no se debería tratar de forma independiente la interpretación de los subconjuntos borrosos y la construcción de un sistema de razonamiento aproximado, es decir, la representación de conectivas junto con las reglas de inferencia.

Bajo esta perspectiva, se aborda la representación de predicados borrosos en el presente Capítulo. Por una parte, hemos intentado establecer de qué tipo de información disponemos para la obtención de un subconjunto borroso que realice la función de extensión de un predicado borroso; de forma análoga a cómo un subconjunto clásico es la extensión de un predicado clásico. A este respecto, parece claro que un predicado borroso se caracteriza, y esto podría tomarse como definición de predicado borroso, por la existencia de elementos a los que ni se les puede aplicar totalmente el predicado ni dejan de cumplirlo de una forma total. Muchos autores [100] consideran que un predicado vago sobre cierto universo X determina tres subconjuntos clásicos disjuntos X_0, X_b, X_1, formados, respectivamente, por los siguientes elementos: X_0 sería el subconjunto de elementos de X a los cuales no se les puede aplicar el predicado; X_1 estaría formado por aquellos elementos que cumplen totalmente el predicado; y, por último, X_b lo formarían los elementos a los que ni se les puede aplicar ni dejar de aplicar totalmente. Normalmente X_b se denomina banda o franja de borrosidad asociada a un predicado borroso. También se suele suponer, de forma explícita o implícita, que sobre X_b existe un orden parcial, indicando que para algunos elementos el predicado es más apropiado que para otros.

El modelo presentado se ajusta a esta forma de entender los predicados borrosos, considerando elementos prototípicos como elementos de X_1, elementos antiprototípicos como elementos de X_0, y, por último, el orden parcial que hay sobre X_b vendría determinado por el uso del predicado, obteniéndose mediante un sistema de reglas.

El otro aspecto básico de la lógica fuzzy que se aborda es la posibilidad de obtener un sistema de conectivas a partir de la determinación de la representación de un predicado vago. La solución propuesta parte de un preorden asociado al sistema de reglas determinadas por el uso del término, con la finalidad de conseguir una serie de conectivas lógicas asociadas.

4.1. La extensión de un predicado

La idea de conjunto está estrechamente relacionada con la idea de propiedad. Todo conjunto de elementos da lugar a una propiedad: «la pertenencia a ese conjunto», y toda propiedad da lugar a un conjunto, «el formado por todos los elementos que tienen esa propiedad». Un predicado P es el nombre o término lingüístico de una propiedad p que se formula sobre alguno de los elementos de un cierto universo X. Un predicado dará lugar al conjunto de proposiciones $PX = \{Px : x \in X\}$, que se formulan sobre los elementos de X para los que tenga sentido. La notación Px representará la proposición «*x es P*». Se dice que un predicado es clásico, bivaluado o nítido, cuando el conjunto PX sólo admite dos grados de verdad. Ejemplos de tales predicados serían *casado*, sobre el conjunto de españoles, o *primo*, sobre el conjunto de números naturales; predicados que corresponderían a las propiedades «estar casado» y «ser un número primo», respectivamente.

La correspondencia entre propiedades y conjuntos se traslada a predicados de forma natural. Cuando el predicado es clásico disponemos de una representación del mismo mediante su extensión conjuntista $\underline{P}$. La extensión será el subconjunto de X formado por los elementos $x \in X$ para los cuales vale la afirmación 'Px es verdadera',

$$\underline{P} = \{x \in X : \text{'}Px \text{ es verdadera'}\}.$$

La extensión de P puede venir dada por su función de pertenencia:

$$\varphi_{\underline{P}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{'}Px \text{ es verdadera'} \\ 0 & \text{'}Px \text{ es falsa'} \end{cases} .$$

Disponer de esta representación nos permite pasar de *ser* a *estar* y las afirmaciones 'Px es verdadera' y 'Px es falsa' pasan a ser las afirmaciones $x \in \underline{P}$ y $x \notin \underline{P}$, respectivamente. Por ejemplo, la extensión del predicado *casado* sería el subconjunto de españoles que están casados, y para el predicado *primo* sería el subconjunto de números naturales primos.

Como es conocido, existe una isomorfía entre el cálculo lógico proposicional clásico y el cálculo conjuntista, y ambos cálculos son ejemplos de una estructura algebraica: las álgebras de Boole. Este hecho nos permite expresar proposiciones no atómicas, en las que intervienen conectivas, como subconjuntos calculados a partir de las extensiones de los predicados que intervienen en la proposición.

Esencialmente, pasamos del cálculo de proposiciones a la teoría de conjuntos, obteniendo las extensiones de los predicados que intervienen, y esto a pesar de que no disponemos de un cálculo efectivo y sistemático para la obtención de una extensión de un predicado clásico. De hecho existen predicados para los cuales no conocemos su extensión. Así, por ejemplo, si consideramos el predicado sobre el conjunto de números naturales pares, $P =$ 'verificar la propiedad de Goldbach', Pn será cierta si n es suma de dos números naturales primos impares. La conjetura de Goldbach afirma que $\underline{G} = \{n \in \mathbb{N} : n \ par\} - \{2, 4\}$, hecho que desconocemos hasta la fecha. No obstante, que no podamos calcular la extensión para todos los predicados clásicos no invalida el sistema, ya que son muchos los predicados para los cuales conocemos su extensión, ni deja de ser un problema abierto para muchas clases de predicados.

La identificación que hemos expuesto entre conjunto-propiedad-predicado se traslada, como se ha visto, a la identificación grado de pertenencia-grado de posesión de una propiedad-grado de verdad de una proposición, variando estos grados, para el caso clásico, en $\{0, 1\}$.

La paradoja del sorites muestra la existencia de predicados sin extensión clásica. Podemos ejemplificar la paradoja del siguiente modo: tomemos un predicado P sobre un universo $X \subseteq \mathbb{R}$, un subconjunto de la recta real y supongamos que para ciertos elementos o, u de X, Po es una proposición falsa y Pu es una proposición verdadera, además, supongamos que P admite las siguientes reglas de comportamiento:

i) si Px e $y \geq x$, entonces Py,

ii) si Px e $y = x - \varepsilon$, siendo ε un valor muy pequeño, entonces Py.

La primera regla afirma que, si Px es verdadera, entonces para todo y con $y \geq x$ tendremos que Py es verdadera. La segunda establece que, si Px es verdadera e y es igual a x menos una cantidad ε muy pequeña, es decir, x e y están muy próximos, entonces también será verdadera Py. Si P verifica las condiciones anteriores, entonces es imposible que exista una extensión clásica $\underline{P}$. Supongamos que la tuviese, es evidente que $o \notin \underline{P}$, y además ningún elemento menor que él puede pertenecer a la extensión de P, ya que, aplicando la regla *i* se llegaría a una contradicción. También es claro que $u \in \underline{P}$ y, por tanto, $o < u$. Aplicando la regla *ii* a u, se cumple que $u - \varepsilon$ pertenece a $\underline{P}$, pero es evidente que existirá un $n \in \mathbb{N}$ tal que, aplicando la regla *ii* n veces, se cumple $u - n\varepsilon \in \underline{P}$ junto con $u - n\varepsilon < o$, lo cual es una contradicción.

Existen muchos predicados cuyo uso se ajusta a las condiciones exigidas como por ejemplo *alto*, *grande* o *calvo*. En los tres casos es fácil pensar en la existencia de elementos para los cuales los predicados dan lugar a proposiciones verdaderas, llamados elementos prototípicos, y de elementos para los cuales los predicados dan lugar a proposiciones falsas, denominados elementos antiprototípicos. De igual forma las reglas parecen razonables, tomemos como ejemplo el predicado *alto*. La regla *i* establece que, si una persona es *alta*, entonces una persona que mida más es también *alta*. La regla *ii* afirma que, si una persona es *alta* y otra mide casi lo mismo que ella, debe ser también *alta*. El valor de ε puede ser tan pequeño que no sea apreciado por los aparatos con los que se mide la altura. Todos estos predicados serían el nombre de una propiedad, como «ser alto», «ser grande» o «estar calvo».

Una forma de solucionar la paradoja del sorites consiste en considerar que las proposiciones del tipo Px, para los predicados del tipo anterior, no presentan únicamente dos valores de verdad sino un conjunto graduado de ellos, considerándose habitualmente el continuo $[0,1]$. Se tendrán, por consiguiente, expresiones de la forma

$$\text{'}Px \text{ es verdadera' con un grado } r \in [0,1],$$

incluyendo como caso particular los predicados clásicos que toman sólo los valores $\{0,1\} \subseteq [0,1]$. Un predicado con estas características se denominará predicado graduado y a la función, μ_P, que da el grado de verdad de la proposición Px, función de compatibilidad. Habitualmente, dicha función será desconocida. Los conceptos lingüísticos vagos que intenta representar la lógica fuzzy son predicados graduados.

En lógica fuzzy para obtener una representación de un predicado vago, es decir, graduado, se procede dando una expresión a la función de compatibilidad. Esto se consigue mediante las funciones de pertenencia generalizadas o subconjuntos borrosos. Asociamos a cada predicado P un subconjunto borroso $\varphi_{\underline{P}} \in \mathscr{F}(X)$, de tal forma que se considera $\mu_P = \varphi_{\underline{P}}$, sustituyendo la afirmación «Px tiene el grado de verdad r» por «x pertenece a $\underline{P}$» con grado de pertenencia $\varphi_{\underline{P}}(x) = r$. Este proceso sería, por consiguiente, el equivalente a dotar de extensión conjuntista a un predicado clásico. Desde este punto de vista, la lógica fuzzy permite dotar de extensión a los predicados graduados. De nuevo se produce una identificación entre grado de pertenencia a un conjunto-grado de posesión de una propiedad-grado de verdad de una proposición. De esta forma, un subconjunto borroso no es más abstracto que un conjunto ordinario, puesto que ambos podemos interpretarlos a partir del concepto común de propiedad, graduada en un caso y clásica en otro.

La forma de obtener una representación de la función de compatibilidad ha sido muy estudiada en la literatura fuzzy; métodos estadísticos, opiniones de expertos, adecuación al problema del que se trate, etc. Aparte de estos métodos parece claro que en muchas ocasiones el uso del predicado a representar indicará que se deben cumplir ciertas reglas, como ocurría en la paradoja del sorites. Esto es lo que nos ha hecho pensar que en algunos casos, en los que conocemos el uso del predicado por ciertas reglas y algunos elementos prototípicos o antiprototípicos, se pueda obtener la función de compatibilidad de forma sistemática. A continuación se muestra el procedimiento para predicados clásicos.

4.2. Obtención de la extensión de un predicado nítido mediante reglas

Supongamos que conocemos el uso de un predicado nítido P en un conjunto X a través de un conjunto de reglas del tipo «si Px entonces Py», que se representarán mediante

$$Px \Rightarrow Py,$$

para un cierto conjunto de pares $(x,y) \in X \times X$. Además, podemos aceptar la verdad de la proposición Pu para cierto elemento $u \in X$, prototípico de P. Establezcamos la hipótesis de que la relación $\Rightarrow$ sobre $PX \times PX$ es reflexiva y transitiva, es decir, un preorden clásico. Por el teorema de representación de preórdenes tendremos que:

$$\Rightarrow = \bigcap_{B \in L} \to_B,$$

donde $L = L(PX, \Rightarrow)$ es el conjunto de estados lógicos para la estructura relacional $(PX, \Rightarrow)$. Utilizando la interpretación de los estados lógicos como «mundos posibles de verdad», en la medida en que vale el *modus ponens*, es razonable exigir que $Pu \in B$ - para todo estado lógico B, si no hay duda de que Pu es siempre verdadera. De esta forma, la intersección de todos los estados lógicos de la estructura relacional considerada, $B^* = \bigcap_{B \in L} B$, es no vacía y, en consecuencia, será un estado lógico propio. Bajo estas condiciones se verifica el siguiente

Teorema 4.2.1

$B^{*} = \{Px \in PX : Pu \Rightarrow Px\} = [Pu, \Rightarrow)$.

Demostración. Si $Pu \Rightarrow Px$, como $Pu \in B$ para cualquier $B \in L$, tendremos que $Px \in B$ para todo $B \in L$, luego $[Pu, \Rightarrow) \subset B^{*}$. Recíprocamente, si $Px \in B^{*}$, se cumplirá que $(Pu, Px) \in B \times B \subset \underset{B}{\rightarrow}$ para todo $B \in L$, o, lo que es lo mismo, $Pu \Rightarrow Px$. Así, $B^{*} \subset [Pu, \Rightarrow)$.

■

El estado lógico B^{*} es la clase de preordenación del elemento Pu respecto al preorden $\Rightarrow$.

Definición 4.2.2

Sea $V : PX \to \{0, 1\}$ la función definida como

$$V(Px) = \varphi_{B^{*}}(Px) = \inf_{B \in L} \varphi_{B}(Px).$$

Es inmediato probar que la función V verifica:

i) $V(Px) \leq \varphi_{B}(Px)$, para cada $Px \in PX$ y cada $B \in L$. Así, se cumplirá que $V(Px) = 1$ si y sólo si $\varphi_{B}(Px) = 1$ para todo $B \in L$. En particular se cumplirá que $V(Pu) = 1$.

ii) $V(Po) = 0$ si y sólo si $\inf_{B \in L} \varphi_{B}(Po) = 0$; es decir, bastaría con que existiese algún $B \in L$ para el que $\varphi_{B}(Po) = 0$.

Teorema 4.2.3

Se cumple que

$V^{-1}(1) = \{Px \in PX : Px \in B^{*}\} = B^{*}$ y $V^{-1}(0) = \{Px \in PX : Px \notin B^{*}\} = B^{*'}$,

siendo $B^{*'}$ el complementario de B^{*} en PX.

Con todo lo dicho y de acuerdo con la afirmación de la verdad de la proposición Pu, será suficiente definir:

$$\text{'}Px \text{ es verdad' si y sólo si } V(Px)=1 \text{, o si y sólo si } Px\in B^*,$$

para obtener que $\underline{P}=\{x\in X:\text{'}Px \text{ es verdad'}\}=B_0$, siendo $B_0=\{x\in X: Px\in B^*\}$. Se consigue, de esta forma, la extensión conjuntista del predicado P.

Es interesante resaltar que exigir que Pu pertenezca a todo estado lógico $B\in L$, es equivalente a añadir nuevas reglas al conjunto definido por $\Rightarrow$. Las nuevas reglas añadidas serían $Px\Rightarrow Pu$, para todo elemento $x\in X$. Considerando la interpretación lógica habitual de las implicaciones *si...entonces...*, es decir la interpretación material, el añadir estas reglas no supondría una modificación sustancial, al ser Pu un elemento verdadero. El nuevo conjunto de reglas vendría representado por un preorden $\Rightarrow^*$, ya que la reflexividad y la transitividad de $\Rightarrow$ no se verían afectadas por las nuevas reglas. Para este nuevo preorden se verificará que $Pu\in B$ para todo estado lógico propio $B\in L(X,\Rightarrow^*)$, pues al ser no vacío $B\in L(X,\Rightarrow^*)$, existirá algún x con $Px\in B$ y, como $Px\Rightarrow Pu$, será $Pu\in B$. Por ello, de nuevo, tendríamos el teorema 4.2.1, $B^*=[Pu,\Rightarrow)$

.

Ejemplo 4.2.4

1. Consideremos el universo $X=\mathbb{N}$, y el conjunto de reglas:

$$Pn\Rightarrow Pm \text{ si y sólo si } m=kn \text{ con } k\in\mathbb{N}-\{0\}.$$

Evidentemente el conjunto de reglas es un preorden. Tomando como prototipo $u=2$, tendremos que

$$[P2,\Rightarrow)=\{Pn\in P\mathbb{N}: n=2k, k\in\mathbb{N}-\{0\}\}=\underline{\text{Par}},$$

es decir, conseguimos la extensión del predicado *Par.* Tomando distintos prototipos conseguiremos el conjunto de múltiplos de cada uno de ellos.

El conjunto de estados lógicos de $\Rightarrow$ será

$$B\in L(\mathbb{N},\Rightarrow) \text{ si y sólo si existe } I\subseteq\mathbb{N} \text{ tal que } B=Mult\{I\},$$

y si añadiéramos las reglas $Pn \Rightarrow P2$, el conjunto de estados lógicos para $\Rightarrow^*$ serían de la forma $B = Mult\{I\} \cup \underline{\text{Par}}$ y, por consiguiente, la intersección de todos ellos daría el conjunto de números naturales pares.

2. Sobre el conjunto de números reales consideremos el siguiente conjunto de reglas:

i) si Px entonces Pkx, con $k \in \mathbb{I} - \{0\}$,

ii) si Px entonces $P\frac{1}{x}$,

siendo $\mathbb{I}$ el conjunto de números enteros. Las reglas anteriores son equivalentes a las siguientes, escritas en la notación que hemos utilizado:

$$Px \Rightarrow Py \text{ si y sólo si o } y = kx \text{ con } k \in \mathbb{I} - \{0\}, \text{ o } y = \frac{1}{x}.$$

Tomando como elemento prototípico el número 1, es fácil comprobar que

$$[P1, \Rightarrow) = \boldsymbol{Q} - \{0\},$$

es decir la clase del 1 está formada por los números racionales sin el cero.

4.3. Obtención de la extensión de un predicado borroso mediante reglas

Pasamos a generalizar a continuación el modelo anterior para un predicado borroso. Estaremos en el caso en el que desconocemos la función de compatibilidad μ_P para un cierto predicado P. La característica más destacada de la función de compatibilidad μ_P es que induce un preorden, que es una cadena, en el conjunto de proposiciones PX,

$$Px \leq Py \text{ si y sólo si } \mu_P(x) \leq \mu_P(y).$$

Este orden puede interpretarse del modo siguiente: $Px \leq Py$ si y sólo si Py tiene un grado de verdad más grande que Px. Si pudiésemos aceptar que para cierto elemento u, Pu es totalmente verdadero es evidente que Pu debería ser un elemento máximo del orden $\leq$, al igual que si Po es totalmente falso, Po debería ser un elemento mínimo de $\leq$. La relación $\leq$ es un preorden, que induce un orden en el conjunto cociente definido mediante la relación de equivalencia:

$$Px \sim Py \Leftrightarrow \mu_P(x) = \mu_P(y).$$

Supongamos que conocemos el uso de un predicado graduado mediante un conjunto de reglas graduadas, inexactas o aproximadas. Supondremos, de nuevo, que el conjunto de reglas viene dado por un T-preorden $I: PX \times PX \to [0,1]$, para cierta t-norma T, trasladando las reglas aproximadas:

Si Px, entonces Py, con grado $I(Py/Px)$.

Debido al teorema de representación de preórdenes:

$$I(Py/Px) = \inf_{f \in T(X,I)} I_f^T(Py/Px).$$

Ahora, supongamos que existe un prototipo u del predicado P, es decir que Pu es verdadera. Interpretando los estados lógicos como mundos posibles de verdad, deberá cumplirse que $f(Pu) = 1$ para todo estado lógico f. Tendremos que $I_f^T(Px/Pu) = f(Px)$ y, de esta forma, $I(Px/Pu) = \inf_{f \in T(X,I)} f(Px)$. La función $\mu_{Pu}: PX \to [0,1]$ definida como

$$\mu_{Pu}(Px) = I(Px/Pu) = \inf_{f \in T(X,I)} f(Px)$$

es la clase de preordenación del elemento Pu. Es evidente que μ_{Pu} verifica,

— $\mu_{Pu} \leq f$ para todo estado lógico f, además $\mu_{Pu}(Px) = 1$ si y sólo si $f(Px) = 1$ para todo f;

— $\mu_{Pu}(Px) = 0$ si y sólo si $\inf_{f \in T(X,I)} f(Px) = 0$, y, por tanto, basta con que sea $f(Px) = 0$ para algún estado lógico f.

La equivalencia

$$Px \equiv Py \text{ si y sólo si } \mu_{Pu}(Px) = \mu_{Pu}(Py)$$

da el conjunto cociente $PX/\equiv$ formado por las clases:

$$\|Px\| = \mu_{Pu}^{-1}(\mu_{Pu}(Px)) = \{Py \in PX : \mu_{Pu}(Px) = \mu_{Pu}(Py)\}.$$

La aplicación inducida $\mu_{Pu}^{*} : PX/\equiv \to [0,1]$, definida como $\mu_{Pu}^{*}(\|Px\|) = \mu_{Pu}(Px)$ es inyectiva, permitiendo definir el orden total,

$$\|Px\| \leq \|Py\| \text{ si y sólo si } \mu_{Pu}^{*}(\|Px\|) \leq \mu_{Pu}^{*}(\|Py\|),$$

para el cual $\|Pu\| = \mu_{Pu}^{-1}(1)$ es el elemento más grande y, si existe algún estado lógico con $f(Po)$, entonces $\|Po\| = \mu_{Pu}^{-1}(0)$ será el elemento más pequeño.

La clase $\|Px\|$ estará la formada por todas las proposiciones del tipo «x es P» que toman el mismo grado de verdad. Cuando $\|Px\| \leq \|Py\|$ podemos decir que las proposiciones en la clase $\|Px\|$ presentan un grado menor o igual de verdad que las proposiciones en $\|Py\|$ respecto a μ_{Pu}^{*} y, entonces, el grado $\mu_P(x)$ al cual Px es verdadera puede ser identificado con $\mu_{Pu}(Px)$. Tenemos por tanto un orden inducido por μ_{Pu} que es «similar» al orden establecido por μ_P. Consecuentemente, para cada $x \in X$, podemos definir:

$$\mu_P(x) = \varphi_{\underline{P}}(x) = \mu_{Pu}(Px) = I(Px/Pu),$$

obteniendo la función de pertenencia del predicado graduado P.

Ejemplo 4.3.1

1. Consideremos el universo $X = (0,3]$ y el predicado $P = \text{ALTO}$ sobre él. El predicado sugiere los siguientes criterios de uso:

— si «x es *alto*» con cierto grado de verdad, entonces para todo $y \geq x$ tendremos que «y es *alto*», con un grado de verdad igual o superior;

— si «x es *alto*» con cierto grado de verdad entonces para todo $y < x$ el grado de verdad «y es *alto*» dependerá de cuánta separación exista entre x e y. Siy es mucho menor que x el grado de «y es *alto*» deberá ser pequeño en comparación con el grado de «x es *alto*».

Escribiendo como reglas estos criterios:

i) si Px y $x \leq y$, entonces Py, al grado 1;

ii) si Px y $x > y$, entonces Py, al grado $F(x,y) \in [0,1]$.

Podemos aceptar, además, los siguientes elementos distinguidos:

iii) $u = 2$ es un prototipo,

iv) $o = 1$ es un antiprototipo.

La condición *i)* indica que el preorden I que represente al conjunto de reglas debe contener el orden usual: si $x \leq y$ entonces $I(y/x) = 1$. Cualquier relación I monótona no decreciente en la segunda componente y reflexiva, cumplirá dicha condición, puesto que si $x \leq y$ tendremos $1 = I(x/x) \leq I(y/x)$. En particular los preórdenes elementales lo cumplen. Por otra parte, la condición *ii)* señala que si se da la desigualdad $x > y$ entonces el grado de la regla es función de los valores de x e y. Como indica el uso parece lógico pensar que a más separación entre x e y menor será el grado de la regla dada por la condición *ii)*. Este hecho se puede recoger tomando o bien la diferencia entre x e y o bien su cociente. Así F podría ser por ejemplo $F_1(x,y) = x - y$, o bien $F_2(x,y) = \dfrac{y}{x}$, con la salvedad de exigir que su valor esté en $[0,1]$.

Las dos condiciones se cumplen tomando cualquiera de los dos preórdenes siguientes:

1) $I_f^{\Pi}(y/x) = Min(1, \dfrac{f(y)}{f(x)})$,

2) $I_f^{W}(y/x) = Min(1, 1-(f(x)-f(y)))$,

donde la función $f:(0,3] \to [0,1]$ puede ser cualquier función monótona no decreciente para lograr que 1) o 2) den lugar al orden usual.

Si consideramos que $u = 2$ debe ser un prototipo entonces se debe verificar que $f(2) = 1$, ya que f es un estado lógico para los dos preórdenes. Tendremos entonces que la clase del prototipo $u = 2$ será:

$$\mu_2(x) = Min(1, f(x)) = f(x),$$

en ambos casos. Si imponemos la condición de que $o = 1$ sea un antiprototipo tendremos que obligatoriamente $f(1) = 0$. Así cualquier función f no decreciente y verificando $f(1) = 0, f(2) = 1$ dará lugar a una extensión para el predicado *alto*.

La función de compatibilidad del predicado P será $\mu_P = \mu_2 = f$ y dará lugar a una división del universo $X = (0,3]$ como $X = (0,1] \cup (1,2) \cup [2,3]$, donde los tres subconjuntos disjuntos son el subconjunto de antiprototipos X_0, la franja de borrosidad X_b, y el subconjunto de prototipos X_1, del predicado respectivamente. El preorden sobre $X_b = (1,2)$ lo da f. Imponiendo más condiciones sobre este preorden podremos calcular una expresión concreta para μ_P. Por ejemplo podemos suponer que el ratio de crecimiento de f sobre X_b es constante, de este modo

$$f(x) = ax + b.$$

Si además tomamos f continua resultará que

$$f(1) = 0 \text{ y } f(2) = 1,$$

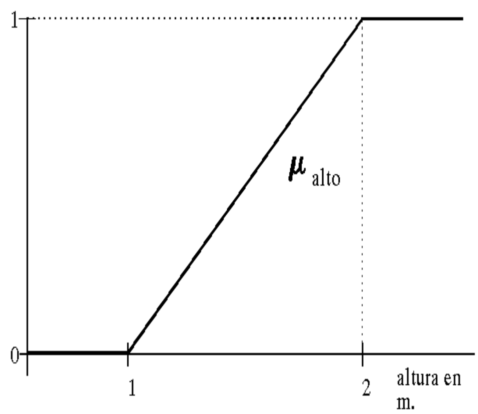


Figura 21. Ejemplo de subconjunto borroso extensión del predicado *alto*

lo que obligará a que $f(x) = x - 1$ sobre $X_b = (1,2)$. El subconjunto borroso extensión de $P = alto$ bajo estas condiciones adicionales se representa en la Figura 21.

2. Consideremos ahora el predicado $P =$ «alrededor de 0.5» sobre $X = [0,1]$. Evidentemente 0.5 será un prototipo y podemos aceptar que 0 y 1 son ambos dos antiprototipos, en la medida en que son los valores más alejados de 0.5. Por otra parte, el grado de verdad de Px dependerá esencialmente de lo cerca o lejos que se encuentre x de 0.5. Tenemos así que una distancia sería la forma «natural» de establecer el grado de verdad de Px para cada $x \in X$. Podemos elegir la distancia $|x - y|$ y, teniendo en cuenta que, a mayor distancia entre x e y, menor debe ser el grado de la regla que relaciona Px con Py, las reglas de uso parecen ser:

i) si Px, entonces Py, al grado $1 - |f(x) - f(y)|$;

ii) 0.5 es un prototipo,

iii) 0, 1 son ambos antiprototipos,

siendo $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$. La relación $I_f^W(y/x) = 1 - |f(x) - f(y)|$ es una W-indistinguibilidad, que tiene a f como uno de sus estados lógicos. Al ser 0.5 un prototipo tendremos $f(0.5) = 1$ y, por tanto,

$$\mu_{0.5}(x) = I_f^W(x/0.5) = 1 - |f(0.5) - f(x)| = f(x).$$

Como debería cumplirse $0 = I_f^W(0/0.5) = f(0)$ y $0 = I_f^W(1/0.5) = f(1)$, la función f estaría sujeta a esas condiciones. Las reglas establecidas tan sólo hablan de distancia, por lo que aplicándolo en particular a los x e y que cumplan $|x - 0.5| = |y - 0.5|$ parece razonable establecer que $I_f^W(x/0.5) = I_f^W(y/0.5)$, lo que conllevaría que f fuese una función simétrica respecto del eje $x = 0.5$.

Para este ejemplo tendremos que $X_0 = \{0,1\}$, $X_1 = \{1\}$, y $X_b = (0,0.5) \cup (0.5,0)$. Bastará por tanto imponer condiciones sobre el «modelo» f en $(0,0.5)$ para determinar una extensión del predicado «alrededor de 0.5».

4.4. Lógica asociada a un predicado borroso

En la lógica proposicional clásica, y en su extensión a la lógica de predicados, se dispone de un sistema de conectivas lógicas bien establecido. La interpretación de la conjunción $\wedge$, de la disjunción $\vee$, de la implicación $\rightarrow$, de la negación $\neg$, o de la equivalencia $\leftrightarrow$, es suficientemente conocida; siendo posible, además, generar estas conectivas a partir de un subconjunto de ellas, e incluso de uno solo, si utilizamos el operador de Shaffer.

En cambio, cuando se consideran predicados borrosos, no se produce la misma situación, dado que muchos sistemas de conectivas son posibles. ZADEH [93] propuso originalmente las conectivas $(Min, Max, 1-j)$ como las conectivas básicos *(y, o, no)*. Pero se pueden utilizar, como muchos autores han mostrado, otras funciones para representar estas conectivas, como las t-normas, t-conormas, las funciones de agregación, las funciones de negación, etc [19, 38]. Básicamente, las propiedades que se exigen a estas funciones para que representen conectivas son de dos tipos:

— la restricción a subconjuntos clásicos deben dar lugar a conectivas clásicas y

— deben verificar alguna o varias de las propiedades algebraicas-funcionales de las conectivas, como son conmutatividad, asociatividad, inversión, etc.

Si es posible seleccionar diferentes conectivas, ¿bajo qué criterios debemos realizar tal selección? Una posibilidad es utilizar criterios heurísticos asociados al problema que se esté considerando, teniendo en cuenta las propiedades que verifican las funciones que representan las distintas conectivas. Si el problema requiere que la conjunción y disyunción verifiquen la propiedad de idempotencia y se utilizan una t-norma y una t-conorma para representar estas dos conectivas, respectivamente, se deben seleccionar las funciones Min y Max. Si además se selecciona una negación fuerte N cualquiera, las tres conectivas formarían una terna de De Morgan. En cambio, si se deben verificar la ley del tercio excluso y la de no contradicción, nos llevaría a elegir la t-norma y t-conorma de Lukasiewicz.

En este apartado planteamos algunas posibilidades que se ofrecen para obtener un sistema de conectivas multivaluado asociado a un predicado, partiendo del mecanismo propuesto para obtener su función de compatibilidad. Consideremos un par (X,P) formado por un universo X y un predicado P, cuya función de compatibilidad μ_P se obtiene a partir de un preorden R. El problema así planteado abre muchas posibilidades, por lo que se ha restringido el estudio al caso en el que el R es un preorden elemental.

El siguiente diagrama conmutativo muestra la situación una vez obtenida μ_P:

$$\begin{tikzcd} PX \arrow[rr, "\mu_P"] \arrow[dr, "\pi"'] & & {[0,1]} \\ & PX/\equiv_{\mu_P} \arrow[ur, "\mu_P^*"'] & \end{tikzcd}$$

Definir un cálculo lógico sobre las proposiciones del conjunto PX a través de la función de compatibilidad μ_P del predicado P consiste en definir una serie de operaciones (T,S,N,I,E) que actúen como el conjunto de conectivas $(\wedge,\vee,\neg,\rightarrow,\leftrightarrow)$, operando de forma funcional sobre las proposiciones no atómicas. Así, para la conjunción

$$Px \wedge Py$$

el valor de verdad que se le atribuye es

$$T(\mu_P(Px), \mu_P(Py)).$$

Evidentemente, por el diagrama antes expuesto esto es equivalente a

$$T(\mu_P^*(\|Px\|), \mu_P^*(\|Py\|)),$$

donde $\|Px\| = \pi(Px)$.

La aplicación μ_P^* es siempre inyectiva. Se exigirá, además, que sea epiyectiva, de forma que para todo $r \in [0,1]$ exista un $Px \in PX$ tal que

$$\mu_P^*(\|Px\|) = r.$$

Este criterio de exhaustividad permite definir las conectivas sobre $[0,1]$ y que esto sea equivalente a definirlas sobre $X/\equiv_{\mu_P}$.

1. Los predicados como magnitudes

Sobre $[0,1]$ los preórdenes elementales son operaciones definidas por residuación a partir de la forma

$$I^T(y/x) = sup\{z \in [0,1] : T(x,z) \leq y\},$$

siendo T una t-norma. Basta con que la t-norma sea continua por la izquierda en la segunda componente para que I^T tenga muchas propiedades interesantes. El siguiente teorema, que aparece en versiones ligeramente diferentes en [5, 41], caracteriza axiomáticamente los preórdenes elementales sobre $[0,1]$.

Teorema 4.4.1

Una operación binaria I sobre $[0,1]$ es un preorden elemental de alguna t-norma continua T si y sólo si satisface las propiedades siguientes:

i) $x \leq y$ si y sólo si $I(y/x) = 1$,

ii) $I(I(z/y)/x) = I(I(z/x)/y)$,

iii) I es monótona en el segundo argumento,

iv) I es continua por la derecha en el segundo argumento y

v) para todo $x > y > z$ en $[0,1]$, $I(y/x) > I(z/x)$.

Además, la t-norma T que genera I vendrá dada por:

$$T(x,y) = inf\{z \in [0,1] : y \leq I(z/x)\}.$$

El anterior teorema, además de caracterizar los preórdenes elementales sobre $[0,1]$, permite recuperar la t-norma T más grande para la que I es T-transitivo. Así, si el predicado P viene dado por un conjunto de reglas que constituyen un preorden elemental, tendrá asociado el par $([0,1], T_P)$, que constituye un semigrupo conmutativo ordenado, cuyo elemento neutro es la unidad y elemento absorbente el cero. Por tanto, podemos considerar el predicado P una magnitud, que abreviaremos como T_P. Esta visión de los predicados graduados como magnitudes puede ser una de las grandes aportaciones de la lógica fuzzy a la lógica de los predicados, y estaría fuertemente relacionado con la parte más fructífera de sus aplicaciones: la teoría de control borroso.

Disponer de la magnitud T_P asociada al predicado P permite seleccionar un conjunto de conectivas sin más que elegir una función de negación fuerte. Como ha mostrado TRILLAS en [60], todas las funciones de negación fuerte son equivalentes, a través de un automorfismo de orden, a la negación habitual $N(x) = 1 - x$. Tomando esta negación, podemos definir las conectivas multivaluadas como

$$r \wedge s = T_P(r,s)$$
$$r' = N_P(r)$$
$$r \vee s = S_P(r,s) = N(T(N(r), N(s)))$$
$$r \rightarrow s = I_P^T(s/r)$$

$$r \leftrightarrow s = E_P(r,s) = T(I_P^T(r/s), I_P^T(s/r)).$$

Las conectivas así definidos son una t-norma T, una función de negación fuerte N, una t-conorma S, una función de implicación definida por residuación (una R-implicación) I^T, que coincide con el preorden elemental a partir del cual se calcula μ_P, y una T-indistinguibilidad E. Todas estas funciones han sido estudiadas en la literatura sobre lógica fuzzy, ejerciendo el papel de conectivas aquí atribuido.

Los operadores de indistinguibilidad fueron introducidos por KARL MENGER [40], para el caso de la t-norma producto y con el nombre de relaciones probabilísticas; con la t-norma mínimo fueron utilizadas como generalizaciones de las relaciones de equivalencia clásicas en la teoría de subconjuntos borrosos por ZADEH [99] con el nombre de relaciones de semejanza; también RUSPINI [52] utiliza los operadores de indistinguibilidad para la t-norma de Lukasiewicz con el nombre de relaciones de similitud. Los operadores de indistinguibilidad han sido estudiados en trabajos posteriores como [34, 51, 69, 85]. Por ejemplo, en [85] puede verse que un T-preorden siempre genera una T-indistinguibilidad mediante una definición como la utilizada con E en nuestro ejemplo. De hecho, el teorema de caracterización de indistinguibilidades [90] permite demostrar que toda T-indistinguibilidad tiene asociado al menos un T-preorden.

Teorema 4.4.2

Dada una T-indistinguibilidad $E: X \times X \to [0,1]$, existe un T-preorden $R: X \times X \to [0,1]$, verificando

$$E(x,y) = Min(R(x/y), R(y/x)).$$

Demostración. Por el teorema de representación de indistinguibilidades existirá una familia de subconjuntos borrosos $\{\mu_j\}_{j \in J}$ tal que

$$E(x,y) = \inf_{j \in J} Min\,(I^T_{\mu_j}(y/x), I^T_{\mu_j}(x/y)).$$

Definiendo

$$R(y/x) = \inf_{j \in J} I^T_{\mu_j}(y/x),$$

tendremos un preorden. Será suficiente probar que

$$\inf_{j \in J} Min\,(d_j, r_j) = Min\,(\inf_{j \in J} d_j, \inf_{j \in J} r_j), \qquad \textbf{(1)}$$

donde $d_j = I^T_{\mu_j}(y/x)$ y $r_j = I^T_{\mu_j}(x/y)$. Pero debido a las desigualdades

$$\inf_{j \in J} Min(d_j, r_j) \leq Min(d_j, r_j) \leq \begin{matrix} d_j \\ r_j \end{matrix},$$

tendremos

$$\inf_{j \in J} Min(d_j, r_j) \leq \begin{matrix} \inf_{j \in J} d_j \\ \inf_{j \in J} r_j \end{matrix}$$

y la desigualdad $\leq$ de (1) será verdadera. Por otra parte, como

$$Min\,(\inf_{j \in J} d_j, \inf_{j \in J} r_j) \leq Min(d_j, r_j),$$

se cumplirá que

$$Min\,(\inf_{j \in J} d_j, \inf_{j \in J} r_j) \leq \inf_{j \in J} Min(d_j, r_j).$$

■

En el ejemplo 2 de 4.3.1 utilizábamos la W-indistinguibilidad $E_f(x,y) = 1 - |f(x) - f(y)|$ para obtener una extensión del predicado P=«alrededor de 0.5». La indistinguibilidad descompone como

$$E_f(x,y) = W(Min(1, 1-f(x)+f(y)),\ Min(1, 1-f(y)+f(x))),$$

por lo que tiene asociado el preorden $R_f(y/x) = Min(1, 1-f(x)+f(y))$. Mediante este preorden se puede obtener una lógica asociada al predicado P por cualquiera de los métodos que aparecen en este apartado. La descomposición de E_f no viene dada por el teorema anterior, ya que en él la descomposición se realiza mediante la t-norma Min. El siguiente teorema responde a la cuestión de porqué E_f puede ser descompuesta de la forma indicada.

Teorema 4.4.3

Si una T-indistinguibilidad está generada por un único subconjunto borroso μ entonces existe un preorden verificando

$$E(x,y) = T(R(y/x), R(x/y)).$$

Demostración. Por el teorema de caracterización de indistinguibilidades será:

$$E(x,y) = Min(I_\mu^T(y/x), I_\mu^T(x/y)),$$

pero al cumplirse que $Max(I_\mu^T(y/x), I_\mu^T(x/y)) = 1$ se tendrá que

$$E(x,y) = T(I_\mu^T(y/x), I_\mu^T(x/y)).$$

■

2. Un sistema de conectivas siguiendo a TARSKI

Como es conocido, TARSKI utilizó las siguientes definiciones para las conectivas lógicas del cálculo proposicional clásico, tomando como conectiva principal la implicación $\rightarrow$ y el elemento mínimo del álgebra de Boole de proposiciones:

— $r' = r \rightarrow 0$,

— $r \vee s = r' \rightarrow s$,

— $r \wedge s = (r' + s')'$,

— $r \leftrightarrow s = (r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r)$.

Siguiendo este modelo, a continuación se estudia qué resultados se obtienen para la lógica asociada a un predicado, utilizando de partida el preorden elemental I^T cuando T es la t-norma Min, o bien una t-norma arquimediana.

1. La implicación

Como ya se ha comentado, los preórdenes elementales, al definirse por residuación, son buenas funciones de implicación salvo en lo que concierne a la continuidad. En general, un preorden elemental no será continuo salvo si la t-norma a partir de la que se define es una t-norma arquimediana no estricta. Para la t-norma Min el preorden elemental es el de Gödel

$$I^{Min}(r/s) = \begin{cases} 1 & si \;\; s \leq r \\ r & \text{e.o.c.} \end{cases},$$

y para una t-norma arquimediana

$$I^T(r/s) = h^{(-1)}(Max((0, h(r) - h(s))) = h^{(-1)}(h(r) \ominus h(s)),$$

como mostramos en la sección 1.2.1 página 26.

2. La negación

La función definida como

— $N(r) = r' = r \rightarrow 0 = I^T(0/r)$

resulta siempre una negación, ya que verifica

i) $N(0) = 1$ $N(1) = 0$ y
ii) N es no decreciente,

pero no será, en general, una negación fuerte (una involución), salvo en el caso en el que la t-norma sea arquimediana no estricta. Por ejemplo, para $T = Min$ se obtiene

$$I^{Min}(0/r) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}.$$

Con T una t-norma arquimediana estricta se obtendrá lo mismo, ya que $I^T(0/0) = 1$, puesto que $0 \leq 0$ y $I^T(0/x) = 0$, debido a $I^T(0/x) = h^{(-1)}(Max(0, h(0) - h(x))) = h^{-1}(h(0)) = 0$.

En cambio, con una t-norma arquimediana no estricta resulta

$$I^T(0/r) = h^{(-1)}(Max(0, h(0) - h(x))) = h^{-1}(h(0) - h(x)).$$

3. La disyunción

Definiendo la disyunción como

— $r \vee s = r' \rightarrow s = I^T(s/r')$,

resulta cuando $T = Min$ que

$$r \vee s = I^{Min}(s/r^{/}) = \begin{cases} 1 & r>0 \text{ o } (r=0 \text{ y } s=1) \\ s & \text{e.o.c.} \end{cases}.$$

Para T arquimediana estricta:

$$r \vee s = \begin{cases} 1 & r>0 \\ s & r=0 \end{cases}.$$

Por último, cuando la t-norma es arquimediana no estricta

$$r \vee s = h^{(-1)}(Max(0, h(s) - h(r^{/}))) = h^{(-1)}(Max(0, h(s) - h(h^{-1}(h(0) - h(r))))) =$$
$$= h^{(-1)}(Max(0, h(s) - h(0) + h(r))).$$

4. La conjunción

Es evidente que para $T = Min$ y T arquimediana estricta, al tener una negación tan débil, la conectiva conjunción definida como

$$r \wedge s = (r^{/} + s^{/})^{/} = I(0/I(s^{/}/r^{//}))$$

será también muy pobre. De hecho en los dos casos resulta

$$r \wedge s = \begin{cases} 1 & \text{si } r^{/} + s^{/} = 0 \\ 0 & \text{si } r^{/} + s^{/} > 0 \end{cases}.$$

En cambio para una t-norma arquimediana no estricta, teniendo en cuenta que

$$h(r^{/} + s^{/}) = h(h^{(-1)}(Max(0, h(h^{-1}(h(0) - h(r))) + h(h^{-1}(h(0) - h(s))) - h(0)))) =$$
$$= h(h^{(-1)}(Max(0, h(0) - (h(r) + h(s))))) =$$
$$= Min(h(0), Max(0, h(0) - (h(r) + h(s)))),$$

se tendrá que si $h(0) \leq h(r) + h(s)$, entonces

$$h(r^{/} + s^{/}) = Min(h(0), 0) = 0.$$

Y si $h(0) > h(r) + h(s)$,

$$h(r' + s') = Min(h(0), h(0) - (h(r) + h(s))) =$$
$$= h(0) - (h(r) + h(s)).$$

Luego

$$h(r' + s') = Max(0, h(0) - (h(r) + h(s)))$$

Y por tanto

$$r \wedge s = (r' + s')' = h^{-1}(h(0) - h(r' + s')) = h^{-1}(h(0) - h(Max(0, h(0) - (h(r) + h(s))))) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } h(0) \leq h(r) + h(s) \\ h^{-1}(h(r) + h(s)) & \text{e.o.c.} \end{array} \right\} =$$

$$= h^{-1}(Min(h(0), h(r) + h(s))).$$

5. La equivalencia

Al definir la equivalencia como

$$r \leftrightarrow s = (r \to s) \wedge (s \to r) = T(I^T(s/r), I^T(r/s)),$$

obtenemos una T-indistinguibilidad. Con el Min se obtiene

$$r \leftrightarrow s = \begin{cases} 1 & \text{si } r = s \\ Min(r, s) & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

y con una t-norma arquimediana

$$r \leftrightarrow s = T(h^{(-1)}(Max(0, h(r) - h(s)), h^{(-1)}(Max(0, h(s) - h(r)) =$$
$$= h^{(-1)}(h(h^{(-1)}(Max(0, h(r) - h(s)))) + h^{(-1)}(h(Max(0, h(s) - h(r))))) =$$
$$= h^{(-1)}(Max(0, h(r) - h(s)) + Max(0, h(s) - h(r))) =$$
$$= h^{(-1)}(Max(h(r) - h(s), h(s) - h(r))),$$

sin más que tener en cuenta que $T(r,s) = h^{(-1)}(h(r) + h(s))$ y que $0 \leq Max(0, h(r) - h(s)) \leq h(0)$ para todo $r, s \in [0,1]$.

Con todo lo dicho parece claro que el caso más favorable se produce cuando la t-norma es arquimediana no estricta, la lógica asociada a un predicado es entonces:

$$r \to s = I^{T}(s/r) = h^{(-1)}(Max(0, h(s) - h(r))),$$
$$r' = h^{-1}(h(0) - h(r)),$$
$$r \vee s = h^{(-1)}(Max(h(r) + h(s) - h(0))),$$
$$r \wedge s = h^{(-1)}(Min(h(0), h(x) + h(y))),$$
$$r \leftrightarrow s = h^{(-1)}(Max(h(r) - h(s), h(s) - h(r))).$$

Cuando $T = W$, obtenemos la lógica de Lukasiewicz:

$$r \to s = Min(1, 1 - r + s)$$
$$r' = 1 - r$$
$$r \vee s = Min(1, r + s)$$
$$r \wedge s = Max(0, r + s - 1)$$
$$r \leftrightarrow s = 1 - |r - s|$$

No sólo los preórdenes elementales generados por una t-norma arquimediana no estricta dan lugar a sistemas de conectivas multivaluadas interesantes. Los dos casi-preórdenes siguientes son dos ejemplos ilustrativos.

Como es conocido [71] la relación de Kleene-Dienes $I(s/r) = Max(1 - r, s)$ es una relación W-transitiva y no reflexiva. De hecho, verifica una reflexividad más débil puesto cumple que $I(r/r) \geq \frac{1}{2}$, para todo r; propiedad que se enuncia como λ-reflexividad, con $\lambda = \frac{1}{2}$ en este caso. Si calculamos la lógica asociada obtenemos:

— $N(r) = I(0/r) = 1 - r$,

— $r \vee s = I(s/r') = Max(1 - (1 - r), s) = Max(r, s)$,

— $r \wedge s = (r' + s')' = 1 - Max(1 - r, 1 - s) = Min(r, s)$, débil puesto cumple que $I(r/r) \geq \frac{1}{2}$, para todo r; propiedad que se enuncia como λ-reflexividad, con $\lambda = \frac{1}{2}$ en este caso. Si calculamos la lógica asociada obtenemos:

— $N(r) = I(0/r) = 1 - r$,

— $r \vee s = I(s/r') = Max(1-(1-r), s) = Max(r,s)$,

— $r \wedge s = (r' + s')' = 1 - Max(1-r, 1-s) = Min(r,s)$,

— $r \leftrightarrow s = W(Max(1-r,s), Max(1-s,r)) = Max(0, Max(1-r,s) + Max(1-s,r) - 1) =$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} Max(0, r+s-1) & \text{si } 1-r < s \\ Max(0, 1-r+1-s-1) & \text{si } 1-r \geq s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} -(1-(r+s)) & \text{si } 1 < r+s \\ 1-(r+s) & \text{si } 1 \geq r+s \end{array} \right\} =$$

$$= |1 - r - s| ,$$

que son las conectivas inicialmente propuestas por ZADEH [93], salvo la equivalencia.

La relación borrosa de Reichenbach $I(s/r) = 1 - r + rs$, tampoco en un preorden aunque es $\frac{3}{4}$-reflexiva y W-transitiva [71], la lógica asociada es la siguiente:

— $N(r) = I(0/r) = 1 - r$,

— $r \vee s = I(s/r') = 1 - (1-r) + (1-r)s = r + s + rs$,

— $r \wedge s = (r' + s')' = 1 - (1 - r + 1 - s - (1-r)(1-s)) = rs$,

— $r \leftrightarrow s = W(1 - r + rs, 1 - s + sr) = Max(0, 1 - r + rs + 1 - s + sr - 1) =$
$= Max(0, 1 - r - s + 2rs) = 1 - r - s + 2rs$.

La conjunción y la disyunción vienen dadas, en este caso, por la t-norma producto Π y su t-conorma dual Π^* dada mediante la negación $N(x) = 1 - x$ y conocida como suma probabilística.

CAPÍTULO 5. ANTÓNIMOS Y SINÓNIMOS

Siendo la lógica fuzzy un intento de representar conceptos lingüísticos del lenguaje natural, parece razonable abordar el estudio del fenómeno de la sinonimia, tan frecuente en los lenguajes naturales. Algunos trabajos pioneros son, por ejemplo, [63,82], en ellos se muestra qué propiedades básicas debería poseer una representación de los sinónimos y antónimos en el marco de la teoría de subconjuntos borrosos. Por ejemplo, parece natural establecer propiedades como que el antónimo de un antónimo sea un sinónimo, o que el sinónimo de una conjunción de términos lingüísticos sea la conjunción de sinónimos. No es difícil buscar ejemplos en el lenguaje natural con estas características, así un antónimo de *fiel* podría ser *traidor* y un antónimo de *traidor* podría ser *leal*, siendo *fiel* y *leal* sinónimos; o un sinónimo de *fiel y bueno* podría ser *leal y bondadoso*. Introduciendo un poco de formalismo, si t denota un término lingüístico genérico y $\theta(t)$ y $\overline{\theta}(t)$ representan, respectivamente, términos sinónimos y antónimos de t, las propiedades anteriores se escribirían como

— $\overline{\theta}(\overline{\theta}(t)) = \theta(t)$,

— $\theta(t_1 \ y \ t_2) = \theta(t_1) \ y \ \theta(t_2)$,

donde *y* sería una conjunción en el conjunto de términos. De la misma forma, si sobre el conjunto de términos tenemos alguna conectiva más, como podrían ser la disyunción y la negación, representadas por *o* y *no*, respectivamente, también parecen razonables las propiedades

— $\theta(t_1 \ o \ t_2) = \theta(t_1) \ o \ \theta(t_2)$ y

— $\theta(no \ t) = no \ \theta(t)$.

débil puesto cumple que $I(r/r) \geq \frac{1}{2}$, para todo r; propiedad que se enuncia como λ-reflexividad, con $\lambda = \frac{1}{2}$ en este caso. Si calculamos la lógica asociada obtenemos:

— $N(r) = I(0/r) = 1 - r$,

— $r \vee s = I(s/r') = Max(1-(1-r),s) = Max(r,s)$,

— $r \wedge s = (r' + s')' = 1 - Max(1-r, 1-s) = Min(r,s)$,

— $r \leftrightarrow s = W(Max(1-r,s), Max(1-s,r)) = Max(0, Max(1-r,s) + Max(1-s,r) - 1) =$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} Max(0, r+s-1) & \text{si } 1-r < s \\ Max(0, 1-r+1-s-1) & \text{si } 1-r \geq s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} -(1-(r+s)) & \text{si } 1 < r+s \\ 1-(r+s) & \text{si } 1 \geq r+s \end{array} \right\} =$$

$$= |1-r-s| ,$$

que son las conectivas inicialmente propuestas por ZADEH [93], salvo la equivalencia.

La relación borrosa de Reichenbach $I(s/r) = 1 - r + rs$, tampoco en un preorden aunque es $\frac{3}{4}$-reflexiva y W-transitiva [71], la lógica asociada es la siguiente:

— $N(r) = I(0/r) = 1 - r$,

— $r \vee s = I(s/r') = 1 - (1-r) + (1-r)s = r + s + rs$,

— $r \wedge s = (r' + s')' = 1 - (1 - r + 1 - s - (1-r)(1-s)) = rs$,

— $r \leftrightarrow s = W(1 - r + rs, 1 - s + sr) = Max(0, 1 - r + rs + 1 - s + sr - 1) =$

$= Max(0, 1 - r - s + 2rs) = 1 - r - s + 2rs$.

La conjunción y la disyunción vienen dadas, en este caso, por la t-norma producto Π y su t-conorma dual Π^* dada mediante la negación $N(x) = 1 - x$ y conocida como suma probabilística.

Concretemos más las ideas intuitivas expuestas, T representará un conjunto de términos dotado de una serie de conectivas, habitualmente $(y,\ o,\ no)$, que posibilitan crear términos compuestos a partir de términos simples. Cualquier representación θ de una operación de sinonimia deberá verificar las propiedades:

— θ debe ser una operación interna en T y

— θ debe conmutar con las conectivas $(y,\ o,\ no)$.

Parece lógico exigir que θ sea un automorfismo de la estructura lógica $L = (\mathrm{T}, y, o, no)$. Esto conduce a considerar al par (L, θ) una estructura de sinonimia para la lógica de términos L. Dos términos t_1, t_2 de T serán sinónimos si se verifica que $t_1 = \theta(t_2)$. Esta misma estructura permitiría definir también cuándo dos términos son antónimos. Basándonos en que un término t_1 es antónimo de otro t_2 cuando es sinónimo de la negación de t_2, tendremos que t_1 es un antónimo de t_2 si se verifica que $\theta(t_1) = no\ t_2$.

La representación que hemos dado es claramente incompleta, ya que la sinonimia es un concepto recíproco: si t_1 es sinónimo de t_2 es evidente que t_2 es sinónimo de t_1, hecho que no quedaría reflejado en nuestro modelo. Para incluirlo sería suficiente considerar el automorfismo inverso de θ. Por consiguiente, parece mejor considerar como estructura de sinonimia el par (L, S), donde S es un subgrupo del grupo de automorfismos de L.

Hasta el momento, la representación de sinónimos y antónimos que hemos expuesto es simbólica, ya que ningún significado se ha asignado a los términos de T. Este punto de vista es el adoptado por algunos autores, como, por ejemplo, en [53]. Pero en el marco de la lógica fuzzy un significado se liga a cada término lingüístico mediante un subconjunto borroso. Para ello se supone la existencia de un universo base X asociado al conjunto de términos lingüísticos, de tal forma que para cada término $t \in \mathrm{T}$

tenemos un subconjunto borroso $\mu_t \in \mathcal{F}(X)$. Por ejemplo, si consideramos los términos lingüísticos que se utilizan para describir la altura de una persona, el universo base podría ser el intervalo de la recta real $(0,3]$ [9]. Si asignamos una semántica a los términos de T mediante subconjuntos borrosos, las conectivas (y, o, no) deberían ser operaciones que en lógica fuzzy habitualmente realizan ese papel, como, por ejemplo, las t-normas, las t-conormas y las funciones de negación. De esta forma, la estructura L llevaría asociada la estructura $(\mathcal{F}(X), T, T^*, N)$ y los automorfismos que podrían representar los sinónimos y antónimos deberían ser automorfismos de la segunda estructura.

Es difícil pensar en un modelo de sinonimia para todo el lenguaje natural, siendo este un fenómeno tan complejo. La utilidad del estudio de la sinonimia en lógica fuzzy se concreta mejor cuando se trabaja con variables lingüísticas. El concepto de variable lingüística fue introducido por ZADEH en sus artículos [96], recopilados en [99]. Informalmente, una variable lingüística es una variable que toma valores en un conjunto de expresiones lingüísticas; por ejemplo, la variable *altura* es una variable lingüística si consideramos los valores que puede tomar como: *alto*, *bajo*, *muy alto*, *más o menos bajo*, *ni alto ni bajo*, etc., y, en cambio, es una variable numérica si los valores que puede tomar están en el intervalo $(0,3]$.

Formalmente, una variable lingüística $\mathfrak{L}$ se define mediante una cuádrupla (X, T, G, M), donde X es el universo base, T el conjunto de términos lingüísticos de la variable, G un conjunto de reglas sintácticas que generan los términos lingüísticos y M un conjunto de reglas semánticas que asocian un significado a cada elemento de T.

[9] No siempre existe un universo base "natural" para el conjunto de términos lingüísticos, esto sucedería, por ejemplo, con los términos utilizados para describir la belleza. Estos casos apoyarían el acercamiento simbólico al problema de la sinonimia por parte de algunos autores.

En el conjunto de términos T se consideran todos los términos lingüísticos que puede tomar como valores $\mathfrak{L}$. Habitualmente, existe un subconjunto T' de T, denominado subconjunto de términos primitivos o atómicos, que permite generar el resto de términos mediante el conjunto de reglas G.

Las reglas de G pueden venir dadas mediante una gramática generativa, como, por ejemplo, una gramática libre del contexto, donde los símbolos terminales son términos lingüísticos primitivos, conectivas lógicas como (y, o, no), o algunos modificadores lingüísticos como *muy*, *bastante*, etc. Un término lingüístico compuesto como *ni muy alto ni muy bajo* se generaría a partir de los términos primitivos *alto* y *bajo*, las conectivas $(y,\ no)$ y el modificador lingüístico *muy*.

El conjunto de reglas semánticas M de $\mathfrak{L}$ permite asignar un significado a cada término de T. A cada término atómico de T' se le asigna un subconjunto borroso de $\mathcal{F}(X)$. Para los términos compuestos de T se calcula el subconjunto borroso asociado mediante la representación de las conectivas, con t-normas, t-conormas y funciones de negación, junto con la representación de los modificadores lingüísticos. Una representación habitual del modificador lingüístico *muy* viene dada por la función x^2, en cambio para el modificador *poco* suele utilizarse $\sqrt{x}$.

El uso de antónimos y sinónimos tendría utilidad en el marco de las variables lingüísticas. Como es habitual, una variable lingüística toma los valores en un conjunto de términos que puede ser generado mediante un único término lingüístico atómico y su antónimo. En el caso expuesto de la *altura*, *alto* y *bajo* son términos antónimos; lo mismo sucede en la variable *edad* con los términos *joven* y *viejo*, o en la variable *verdad* con *verdadero* y *falso*. En consecuencia, valdría con elegir uno de estos términos si supiésemos calcular un antónimo. Por otra parte, los términos lingüísticos de T pueden presentar términos sinónimos, que no serían valores diferentes para la variable lingüística pero que podrían tener asignado un significado diferente mediante las reglas semánticas de M.

En este Capítulo abordaremos el estudio de los automorfismos de la estructura $(\mathscr{F}(X), T, S, N)$, siendo X un universo finito y donde T y S son una t-norma y una t-conorma positivas y N una negación fuerte. En [45] se realizó este estudio para las conectivas $(Min, Max, 1-j)$. Además, se estudian los automorfismos en $[0,1]$ para las t-normas arquimedianas. En [82] se estudiaron los automorfismos sobre $[0,1]$ para la t-norma Min. Por último, se aplican los resultados obtenidos a la representación de antónimos y sinónimos.

5.1. Automorfismos sobre subconjuntos borrosos en un universo finito

Sea $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ un conjunto finito, denotaremos como ha sido habitual en la memoria, con $\mathscr{F}(X)$ a la clase de subconjuntos borrosos sobre X, y con $\wp(X)$ al subconjunto de $\mathscr{F}(X)$ formado por las funciones de pertenencia sobre $\{0,1\}$. Dadas una t-norma T, una t-conorma S y una función de negación fuerte $N:[0,1]\to[0,1]$ [*vid.* Apéndice], para cada par de subconjuntos borrosos $\mu,\rho\in\mathscr{F}(X)$ se definen los subconjuntos borrosos $T(\mu,\rho)$, $S(\mu,\rho)$, $N(\mu)$ como

$$T(\mu,\rho)(x)=T(\mu(x),\rho(x)),$$
$$S(\mu,\rho)(x)=S(\mu(x),\rho(x)),$$
$$N(\mu)(x)=N(\mu(x)).$$

Considerando los subconjuntos borrosos nulo $\mathbf{0}$ e identidad $\mathbf{1}$ definidos como: $\mathbf{0}(x)=0$ y $\mathbf{1}(x)=1$ para todo $x\in X$; $L_{T,S}(\mathscr{F}(X))$ denotará la estructura $\langle\mathscr{F}(X),T,S,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$, y $M_{T,N}(\mathscr{F}(X))$ será la estructura $\langle\mathscr{F}(X),T,T^*,N,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$, donde T^* es la t-conorma dual de T.

Dada un subconjunto borroso $\mu:X\to[0,1]$ se escribirá

$$\underset{x\in X}{\boldsymbol{T}}\,\mu(x)=T(\mu(x_1),\mu(x_2),\ldots,\mu(x_n)),$$

expresión bien definida debido a la asociatividad de T. Una t-norma T es *positiva* [*vid.* Apéndice], o sin divisores de cero, si:

$$T(x,y)=0 \text{ implica } x=0 \text{ o } y=0.$$

Las t-normas $T=Min$ y $T=\Pi$ son ambas positivas, pero la t-norma de Łuckasiewicz $T=W$ no lo es.

El conjunto $Aut(L_{T,S}(\mathscr{F}(X)))$ será el conjunto de aplicaciones biyectivas θ: $\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$ tal que:

$$\theta(T(\mu,\rho))=T(\theta(\mu),\theta(\rho))$$
$$\theta(S(\mu,\rho))=S(\theta(\mu),\theta(\rho))$$

para cualquier $\mu,\rho\in\mathscr{F}(X)$.

El siguiente teorema es evidente,

Teorema 5.1.1

$Aut(L_{T,S}(\mathscr{F}(X)))$ es un grupo, que denominaremos grupo de automorfismos de $L_{T,S}(\mathscr{F}(X))$.

Teorema 5.1.2

Para todo $\theta\in Aut(L_{T,S}(\mathscr{F}(X)))$ se verifica que $\theta(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ y $\theta(\mathbf{1})=\mathbf{1}$.

Demostración.

Debido a que $\theta(\mathbf{0})=\theta(T(\mathbf{0},\mu))=T(\theta(\mathbf{0}),\theta(\mu))\leq Min(\theta(\mathbf{0}),\theta(\mu))$, se cumplirá que $\theta(\mathbf{0})\leq\theta(\mu)$ para todo $\mu\in\mathscr{F}(X)$. Por otra parte, $\theta(\mu)=\theta(T(\mathbf{1},\mu))=T(\theta(\mathbf{1}),\theta(\mu))\leq Min(\theta(\mathbf{1}),\theta(\mu))$ y, por tanto, $\theta(\mu)\leq\theta(\mathbf{1})$ para todo $\mu\in\mathscr{F}(X)$. Luego

$$\theta(\mathbf{0})\leq\theta(\mu)\leq\theta(1).$$

Si fuese $\mathbf{0}<\theta(\mathbf{0})$ existiría $\mu\in\mathscr{F}(X)$ tal que $0<\mu<\theta(\mathbf{0})$ y tomando $\rho\in\mathscr{F}(X)$ tal que $\mu=\theta(\rho)$, que existirá ya que θ es una biyección, tendríamos que $0<\theta(\rho)<\theta(\mathbf{0})$, en contra de lo demostrado. Lo mismo para $\theta(\mathbf{1})$. ■

El conjunto $Aut(M_{T,N}(\mathscr{F}(X)))$ representará al grupo de automorfismos de $L_{T,T^*}(\mathscr{F}(X))$ que verifican además

$$\theta(N(\mu))=N(\theta(\mu)),$$

para cada $x\in X$. Si no induce a error, denotaremos $N(\mu)$ como μ'.

Proposición 5.1.3

Si $\theta\in Aut(L_{T,S}(\mathscr{F}(X)))$, con T una t-norma y S una t-conorma ambas positivas, la restricción de θ a $\wp(X)$ es un automorfismo del álgebra booleana $\wp(X)$.

Demostración. Si $\mu\in\wp(X)$ y $\mu'=1-\mu$ es su complemento clásico, entonces para todo $x\in X$ se cumplirá que

$$T(\mu,\mu')(x)=0 \quad \text{y} \quad S(\mu,\mu')(x)=1.$$

Para cualquier $\theta\in Aut(L_{T,S}(\mathscr{F}(X)))$ se verificará entonces que:

$$\theta(T(\mu,\mu'))=T(\theta(\mu),\theta(\mu'))=\mathbf{0}$$
$$\theta(S(\mu,\mu'))=S(\theta(\mu),\theta(\mu'))=\mathbf{1},$$

es decir, para todo $x\in X$,

$$T(\theta(\mu)(x),\theta(\mu')(x))=0 \quad y \quad S(\theta(\mu)(x),\theta(\mu')(x))=1.$$

Como T es positiva se tendrá que $\theta(\mu)(x)=0$ o $\theta(\mu')(x)=0$. En el primer caso, $S(0,\theta(\mu')(x)) = \theta(\mu')(x) = 1$ y, en el segundo, $S(\theta(\mu)(x),0) = \theta(\mu)(x) = 1$. Consecuentemente, $\theta(\mu),\theta(\mu')\in\wp(X)$. ■

Es interesante resaltar que, de acuerdo con la demostración de la proposición, $\theta(\mu')=\theta(\mu)'$ para todo $\mu\in\wp(X)$.

Sean

$$\delta_a(x)=\begin{cases} 1 & x=a \\ 0 & x\neq a \end{cases}$$

los subconjuntos unitarios de $\wp(X)$.

Proposición 5.1.4

Para cualquier automorfismo θ de $\wp(X)$ existe una permutación s de X tal que:

$$\theta(\mu)(x)=\mu(s(x)),$$

para todo $x\in X$ y todo $\mu\in\wp(X)$.

Demostración. Sea θ un automorfismo de $\wp(X)$, veamos que conserva el orden parcial definido puntualmente como:

$$\mu\leq\eta \text{ si y sólo si } \mu(x)\leq\eta(x), \text{ para todo } x\in X.$$

Es evidente que se cumple, para todo $\mu,\eta\in\wp(X)$,

$$\mu\leq\eta \text{ si y sólo si } T(\mu,\eta)=\mu.$$

Aplicando θ tendremos

$$\theta(T(\mu,\eta))=T(\theta(\mu),\theta(\eta))=\theta(\mu),$$

y como $\theta(\mu),\theta(\eta)\in\wp(X)$ se cumplirá que $\theta(\mu)\leq\theta(\eta)$.

Por tanto, los subconjuntos unitarios δ_a, es decir, los átomos de $\wp(X)$, tendrán como imágenes subconjuntos unitarios, o sea, $\theta(\delta_a)=\delta_b$. Al ser θ una biyección esto dará lugar a una permutación sobre X. Por otra parte, cualquier $\mu\in\wp(X)$ se escribirá como

$$\mu = \underset{x\in\{a_1,\dots,a_m\}}{\boldsymbol{S}} (\delta_x),$$

donde $\{a_1,\dots,a_m\}$ son todos los puntos donde μ vale 1. Así la imagen de un subconjunto clásico queda determinada por la imagen de los subconjuntos unitarios que lo componen. ■

Denotemos por $\sigma_k(x)=k$ a los subconjuntos borrosos constantes. Para cualquier $x\in X$ y cualquier $k\in[0,1]$, si $\theta\in AutL_{T,S}(\mathscr{F}(X))$, se definen:

$$\theta_x(k)=\theta(\sigma_k)(x).$$

Proposición 5.1.5

La aplicación θ_x, para cualquier $x\in X$, es un automorfismo de $L_{T,S}([0,1])= \langle [0,1],T,S,0,1\rangle$.

Demostración. Para cualquier $x\in X$ y $r,s\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}\theta_x(T(r,s)) &= \theta(\sigma_{T(r,s)})(x)=\theta(T(\sigma_r,\sigma_s))(x)=T(\theta(\sigma_r),\theta(\sigma_s))(x)=\\ &= T(\theta(\sigma_r)(x),\theta(\sigma_s)(x))=\\ &= T(\theta_x(r),\theta_x(s)),\end{aligned}$$

y de una forma similar se prueba para S. También es claro que $\theta_x(0)=0$ y $\theta_x(1)=1$. ■

El siguiente teorema muestra como son los automorfismos sobre $L_{T,S}(\mathscr{F}(X))$.

Teorema 5.1.6

Una aplicación $\theta: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$ es un automorfismo de $L_{T,S}(\mathscr{F}(X))$ con T y S una t-norma y t-conorma positivas, si y sólo si existe una familia $\{\theta_x\}_{x\in X}$ de automorfismos de $L_{T,S}([0,1])$ y una permutación s de X, tal que

$$\theta(\mu)(x) = \theta_x(\mu(s(x)))$$

para cada $x \in X$.

Demostración. La aplicación $\theta(\mu)(x) = \theta_x(\mu(s(x)))$, con s cualquier permutación de X, es biyectiva como se comprueba fácilmente, y define un automorfismo, ya que:

$$\begin{aligned}\theta(T(\mu,\rho))(x) &= \theta_x(T(\mu,\rho)(s(x))) = \theta_x(T(\mu(s(x)),\rho(s(x)))) = \\ &= T(\theta_x(\mu(s(x)),\theta_x(\rho(s(x))) = \\ &= T(\theta(\mu),\theta(\rho))(x).\end{aligned}$$

Siendo análoga la prueba para S. Además se verifica que $\theta(\mathbf{0})(x) = \theta_x(\mathbf{0}(s(x))) = \theta_x(0) = 0$ y $\theta(\mathbf{1})(x) = \mathbf{1}$.

Recíprocamente, si $\mu \in \mathscr{F}(X)$, como:

$$T(\delta_a(x), \sigma_{\mu(a)}(x)) = \begin{cases} \mu(a), & \text{si } x = a \\ 0, & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

tendremos que

$$\mu(x) = \mathop{\boldsymbol{S}}_{a\in X} (T(\delta_a(x), \sigma_{\mu(a)}(x))).$$

Entonces:

$$\theta(\mu)(x) = \theta(\mathop{\boldsymbol{S}}_{a\in X}(T(\delta_a, \sigma_{\mu(a)}))(x) = \mathop{\boldsymbol{S}}_{a\in X}(T(\theta(\delta_a)(x), \theta(\sigma_{\mu(a)})(x)) =$$

$$= \mathop{\boldsymbol{S}}_{a\in X}(T(\delta_{s^{-1}(a)}(x), \theta_x(\mu(a)))) =$$

$$= \theta_x(\mu(s(x))),$$

desde que, por la proposición 5.1.3, $\theta(\delta_a)$ es un átomo de $\wp(X)$ y, consecuentemente, $\theta(\delta_a) = \delta_{s^{-1}(a)}$ para alguna permutación s de X. Obviamente, $\delta_{s^{-1}(a)}(x) = 1$ si y sólo si $a = s(x)$. ■

Teorema 5.1.7

Una aplicación θ sobre $M_{T,N}(\mathscr{F}(X)) = \langle \mathscr{F}(X), T, T^*, N, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, con T una t-norma positiva y T^* su t-conorma N-dual, es un automorfismo si y sólo si existe una familia $\{\theta_x\}_{x \in X}$ de automorfismos de $[0,1]$, y una permutación s de X tal que se verifican las dos condiciones siguientes:

i) $\theta(\mu)(x) = \theta_x(\mu(s(x)))$, para cada $\mu \in \mathscr{F}(X)$ y cada $x \in X$,

ii) $N(\theta_x(k)) = \theta_x(N(k))$, para cualquier $k \in [0,1]$.

Demostración. Si *i* y *ii* son ciertas, entonces

$$\theta(\mu')(x) = \theta_x(N(\mu(s(x)))) = N(\theta_x(\mu(s(x)))) = N(\theta(\mu)(x)) = \theta(\mu)'(x)$$

y, por el teorema 5.1.6, θ es un automorfismo de $M_{T,N}(\mathscr{F}(X))$.

Recíprocamente, sea $\theta \in Aut M_{T,N}(\mathscr{F}(X))$, como $\theta \in Aut L_{T,T^*}(\mathscr{F}(X))$, por el teorema 5.1.6, existirá una familia $\{\theta_x\}_{x \in X}$ de automorfismos de $[0,1]$ y una permutación s de$X$ tal que $\theta(\mu)(x) = \theta_x(\mu(s(x)))$ para cada $\mu \in \mathscr{F}(X)$. Desde que $\theta(\mu') = \theta(\mu)'$, considerando $\mu = \sigma_k$, se tendrá que $\mu' = \sigma_{N(k)}$ y $\theta(\sigma_{N(k)}) = \theta(\sigma_k)' = N(\theta(\sigma_k))$; es decir que

$$\theta_x(N(k)) = N(\theta_x(k)).$$

■

5.2. Automorfismos sobre [0,1]

De acuerdo con el teorema 5.1.6, un automorfismo de $L_{T,S}(\mathscr{F}(X))$ está compuesto de una permutación de X y un automorfismo de $[0,1]$ y, por tanto, conviene estudiar el conjunto de automorfismos sobre $[0,1]$. En [82] se estudió el conjunto de automorfismos de $L_{Min,Max}([0,1]) = \langle [0,1], Min, Max, 0, 1 \rangle$, conjunto que denotaremos a partir de este momento como $L_1([0,1])$. Una aplicación biyectiva, θ, pertenece a $Aut\, L_1([0,1])$ si y sólo si es una función creciente, propiedad que es equivalente a que preserve el mínimo. Por ejemplo, los modificadores lingüísticos $\sqrt{x}$ o x^2 son automorfismos de $L_1([0,1])$. Estudiaremos ahora cómo son los automorfismos continuos sobre $[0,1]$ cuando las t-normas son arquimedianas positivas y no positivas.

Sea $L_2([0,1])$ la estructura $\langle [0,1], \Pi, \Pi^*, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, es evidente que $\theta \in Aut L_2([0,1])$ si y sólo si es una biyección y verifica

$$\theta(xy) = \theta(x)\theta(y), \tag{1}$$

$$\theta(x + y - xy) = \theta(x) + \theta(y) - \theta(x)\theta(y), \tag{2}$$

para todo $x, y \in [0,1]$. Como es bien conocido [1], la primera ecuación tiene como soluciones continuas las funciones $\theta(x) = x^a$ o $\theta(x) = 0$. Excepto para $a = 0$, las soluciones $\theta(x) = x^a$ son las únicas que son biyectivas. Pero si θ debe satisfacer (2) el único valor posible para a es 1, ya que si tomamos $x = y = \dfrac{1}{q}$ $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ en (2) se debe verificar

$$\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-\frac{1}{q^2}\right)^a=\left(\frac{1}{q}\right)^a+\left(\frac{1}{q}\right)^a-\left(\frac{1}{q}\right)^{2a}$$

y

$$(2q-1)^a=2q^a-1 \quad \text{para todo } q\in\mathbb{N}-\{0\}.$$

Sea la función diferenciable $f(a)=(2q-1)^a-2q^a+1$, esta función es igual a 0 en $a=0$ y $a=1$, siendo fácil de comprobar que ningún otro punto anula la función.

De esta forma, el conjunto de automorfismos continuos para $L_2([0,1])$ es $Aut^c\, L_2([0,1])=\{\mathrm{Id}\}$.

Sin la condición de continuidad también resulta como único automorfismo la identidad [2]. El argumento es el siguiente. Al definir $f(z)=1-\theta(1-z)$, (2) se convierte en

$$f(xy)=f(x)f(y) \quad \text{para todo } x,y\in[0,1],$$

sin más que sustituir x e y por $1-x$ y $1-y$, respectivamente. Tomando $x=y=\sqrt{t}$ obtendremos que $f(t)=f(\sqrt{t}\,)^2\geq 0$. Luego teniendo en cuenta la expresión de f

$$\theta(x)\leq 1, \text{ para todo } x\in[0,1]. \tag{3}$$

Por otra parte, con $x=e^{-t}$, $y=e^{-u}$ y $g(t)=\theta(e^{-t})$, la ecuación (1) sobre $(0,1]^2$ se transforma en

$$g(t+u)=g(t)g(u), \tag{4}$$

con $t,u\in[0,\infty)$. Por (3), $g(t)\leq 1$ y en Aczél [1] pp. 38-39, las únicas soluciones de (4) acotadas superiormente y biyectivas son $g(t)=e^{-at}$. Esto da como resultado para θ, teniendo en cuenta la expresión de g:

$$\theta(x)=g(-\ln x)=e^{-a(-\ln x)}=\begin{Bmatrix} x^a & x\in(0,1] \\ 0 & x=0 \end{Bmatrix}=x^a.$$

Y, aplicando el mismo razonamiento que hicimos en el caso continuo, $Aut\, L_2([0,1]) = \{Id\}$.

Es posible generalizar el resultado anterior a cualquier t-norma arquimediana estricta. Como es conocido [54], una t-norma arquimediana estricta admite una representación de la forma

$$T(x,y)=h^{-1}(h(x)h(y)),$$

para todo $x,y\in[0,1]$, siendo h una biyección de $[0,1]$ creciente. Si consideramos $L_2^*([0,1])=\langle[0,1],T,T^*,0,1\rangle$ con $T(x,y)=h^{-1}(h(x)h(y))$ y $T^*(x,y)=h^{-1}(h(x)+h(y)-h(x)h(y))$, las ecuaciones (1) y (2) se escribirán como:

$$\theta(h^{-1}(h(x)h(y)))=h^{-1}(h(\theta(x))h(\theta(y))),$$

$$\theta(h^{-1}(h(x)+h(y)-h(x)h(y)))=h^{-1}(h(\theta(x))+h(\theta(y))-h(\theta(x))h(\theta(y))),$$

y definiendo $f=h\circ\theta\circ h^{-1}$, estas ecuaciones serán equivalentes a

$$f(h(x)h(y))=f(h(x))f(h(y)),$$

$$f(h(x)+h(y)-h(x)h(y))=f(h(x))+f(h(y))-f(h(x))f(h(y)).$$

Realizando un cambio de variable tendremos

$$f(vw)=f(v)f(w),$$

$$f(v+w-vw)=f(v)+f(w)-f(v)f(w),$$

para todo $v,w \in [0,1]$. De esta forma la única solución para f será la identidad. Luego

$$f = \mathrm{Id} = h \circ \theta \circ h^{-1},$$

que es equivalente a $h = h \circ \theta$ y, por consiguiente, $\theta = \mathrm{Id}$.

Cuando consideramos la estructura $L_{W,W^*}(\mathscr{F}(X)) = \langle \mathscr{F}(X), W, W^*, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ no es posible aplicar el teorema 5.1.6 ya que W no es una t-norma positiva. Sin embargo una función $\theta : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$ definida como $\theta(\mu)(x) = \theta_x(\mu(s(x)))$ dará lugar siempre un automorfismo de $L_{W,W^*}(\mathscr{F}(X))$, como se puede comprobar aplicando la primera parte del teorema citado. Es interesante, por consiguiente, estudiar el grupo $L_3([0,1]) = \langle [0,1], W, W^*, 0, 1 \rangle$.

Por definición, $\theta \in Aut\, L_3([0,1])$ si

$$\theta(Max(0, x+y-1)) = Max(0, \theta(x) + \theta(y) - 1), \tag{5}$$

$$\theta(Min(1, x+y)) = Min(1, \theta(x) + \theta(y)). \tag{6}$$

Cuando $x + y \leq 1$, la ecuación (5) implica

$$\theta(0) = 0 = Max(0, \theta(x) + \theta(y) - 1),$$

y por ello $\theta(x) + \theta(y) - 1 \leq 0$. Además por (6) tendremos

$$\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y).$$

Cuando $x + y > 1$

$$\theta(x+y-1) = Max(0, \theta(x) + \theta(y) - 1),$$

por (5) y

$$\theta(1)=1=Min(1,\theta(x)+\theta(y)),$$

por (6). Así $\theta(x)+\theta(y)\geq 1$ y

$$\theta(x+y-1)=\theta(x)+\theta(y)-1.$$

Como consecuencia, las ecuaciones funcionales (5) y (6) son equivalentes a las ecuaciones

$$\theta(x+y)=\theta(x)+\theta(y), \quad \text{si } x+y\leq 1 \tag{7}$$

$$\theta(x+y-1)=\theta(x)+\theta(y)-1, \quad \text{si } x+y>1, \tag{8}$$

con las condiciones iniciales $\theta(0)=0$ y $\theta(1)=1$. Como es bien conocido [1], las únicas funciones acotadas, recuérdese que exigimos que θ sea biyectiva, que verifican (7) son de la forma $\theta(x)=\lambda x$ y con las condiciones iniciales sólo puede ser la identidad. Así, $Aut\,L_3([0,1])=\{\mathrm{Id}\}$.

Al igual que para las t-normas arquimedianas estrictas, una t-norma T es arquimediana no estricta, si y sólo si admite una representación mediante una función h biyectiva y creciente sobre $[0,1]$ tal que

$$T(x,y)=h^{-1}(Max(0,h(x)+h(y)-1)).$$

Consideremos entonces $L_3^*([0,1])=\langle [0,1],T,T^*,0,1\rangle$ con $T(x,y)=h^{-1}(Max(0,h(x)+h(y)-1))$ y $T^*(x,y)=h^{-1}(Min(1,h(x)+h(y)))$. Las ecuaciones (5) y (6) pasan a ser

$$\theta(h^{-1}(Max(0,h(x)+h(y)-1)))=h^{-1}(Max(0,h(\theta(x))+h(\theta(y))-1)),$$

$$\theta(h^{-1}(Min(1,h(x)+h(y))))=h^{-1}(Min(1,h(\theta(x))+h(\theta(y)))),$$

y tomando de nuevo $f=h\circ\theta\circ h^{-1}$ estas ecuaciones son equivalentes a

$$f(h(x)+h(y))=f(h(x))+f(h(y)) \quad \text{si } h(x)+h(y)\leq 1,$$

$$f(h(x)+h(y)-1)=f(h(x))+f(h(y))-1 \quad \text{si } h(x)+h(y)>1.$$

Por ser f y h biyectiva, tendremos que la única solución para las anteriores ecuaciones es la identidad lo cual implica que el conjunto de automorfismos de $L_3^*([0,1])$ se reduce a la función identidad.

5.3. Representación de antónimos y sinónimos

Como se indicó en la Introducción del presente Capítulo, los automorfismos de las estructuras $L_{T,S}(\mathscr{F}(X))$ pueden constituir un buen modelo para representar los sinónimos y antónimos en lógica fuzzy. Gracias a los dos apartados anteriores y a los trabajos [45, 82] los automorfismos de $L_{T,S}(\mathscr{F}(X))$ están caracterizados, para X finito, cuando se consideran la t-norma *Min* y la t-conorma *Max* y un par formado por una t-norma arquimediana estricta y su t-conorma dual.

Si como definición de sinonimia entre dos subconjuntos borrosos μ, η adoptamos simplemente que exista un automorfismo θ que transforme uno en el otro: $\theta(\mu) = \eta$, los siguientes teoremas muestran, para el caso de la pareja *Min* y *Max*, que «demasiados» subconjuntos borrosos serían sinónimos.

Teorema 5.3.1

Si $\mu, \rho \in \mathscr{F}(X)$ con X finito, las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un automorfismo $\theta \in Aut L_{Min,Max}(\mathscr{F}(X))$ verificando $\theta(\mu) = \rho$ son

$$|(\mu)_0| = |(\rho)_0| \tag{9}$$

$$|[\mu]_1| = |[\rho]_1|, \tag{10}$$

donde $[\mu]_1 = \{x \in X : \mu(x) = 1\}$ y $(\mu)_0 = \{x \in X : \mu(x) > 0\}$ son el núcleo y el soporte de un subconjunto borroso respectivamente, y $|\quad|$ simboliza el cardinal de un conjunto.

Demostración. Si $\theta(\mu)=\rho$, o $\theta(\mu)(x)=\theta_x(\mu(s(x)))=\rho(x)$ para todo $x\in X$, es evidente que si $x\notin(\rho)_0$ es decir $\rho(x)=0$, entonces $\theta_x(\mu(s(x)))=0$ y, por ello, $\mu(s(x))=0$, así $s(x)\notin(\mu)_0$. De esta forma tendremos que $(\mu)_0^{/}\subseteq(\rho)_0^{/}$. La inclusión contraria es también evidente, luego $x\in(\rho)_0^{/}$ si y sólo si $s(x)\in(\mu)_0^{/}$. Como s es una biyección de X se cumplirá (9). De forma análoga $x\in[\rho]_1$ si y sólo si $s(x)\in[\mu]_1$ y será cierto (10).

Recíprocamente, construyamos un automorfismo θ tal que $\theta(\mu)=\rho$. Por (9), (10) y la condición $[\mu]_{\alpha_\mu}\cap(\mu)_0^{/}=\varnothing$, existirá una permutación de X tal que

$$s((\rho)_0^{/})=(\mu)_0^{/},$$
$$s([\rho]_1)=[\mu]_1,$$
$$s((\rho)_0-[\rho]_1)=(\mu)_0-[\mu]_1$$

y, por ello,

$$\rho(x)=0 \text{ si y sólo si } \mu(s(x))=0,$$
$$\rho(x)=1 \text{ si y sólo si } \mu(s(x))=1,$$
$$0<\rho(x)<1 \text{ si y solo si } 0<\mu(s(x))<1.$$

Cuando sea $0<\rho(x)<1$ para cierto x, siempre es posible obtener un automorfismo θ_x de $L_1([0,1])$ verificando $\theta_x(\mu(s(x)))=\rho(x)$. Por ejemplo, con los automorfismos $\theta(x)=x^a$ para $a>0$, bastará elegir a de forma que

$$\theta_x(\mu(s(x)))=\mu(s(x))=\rho(x),$$

lo cual se consigue con

$$a=\log_{\mu(s(x))}\rho(x)=\frac{\log\rho(x)}{\log\mu(s(x))}>0.$$

■

El siguiente resultado estudia cuando la familia $\{\theta_x\}$ se puede reducir a un único automorfismo.

Teorema 5.3.2

Sean $\mu, \rho \in \mathscr{F}(X)$ dos subconjuntos borrosos con puntos sobre un universo finito. Para que exista $\theta \in AutL_1([0,1])$ y una permutación s de X tal que $\theta(\mu(s(x))) = \rho(x)$ para todo $x \in X$, es necesario y suficiente que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

i) $|(\mu)_0| = |(\rho)_0|$, $|[\mu]_1| = |[\rho]_1|$,

ii) existe una permutación s de X y una ordenación de X, $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$, tal que

$$(\mu(s(x_{i_1})), \rho(x_{i_1})) \leq^* \dots \leq^* (\mu(s(x_{i_n})), \rho(x_{i_n})),$$

donde $\leq^*$ es el orden parcial sobre $[0,1]^2$ dado por

$$(x_0, y_0) \leq^* (x_1, y_1) \text{ si y sólo si } (x_0, y_0) = (x_1, y_1) \text{ o } (x_0 < x_1 \text{ y } y_0 < y_1).$$

Demostración. Si existe θ y s verificando $\theta(\mu(s(x))) = \rho(x)$ para todo $x \in X$, por el teorema 5.3.1 la condición *i* es cierta. Además, considerando una reordenación de los elementos de X de tal forma que

$$(\mu(s(x_{i_1})), \leq \dots \leq (\mu(s(x_{i_n})),$$

al ser θ estrictamente creciente tendremos

$$(\mu(s(x_{i_1})), \rho(x_{i_1})) \leq^* \dots \leq^* (\mu(s(x_{i_n})), \rho(x_{i_n})).$$

Recíprocamente, si *i* y *ii* son ciertas, tomando $\theta: [0,1] \rightarrow [0,1]$ definida como $\theta(\mu(s(x))) = \rho(x)$ obtenemos una biyección estrictamente creciente gracias al orden dado por ii. Por i, $\theta(0)=0$ y $\theta(1)=1$ y, por tanto, $\theta \in AutL_1([0,1])$, verificándose la condición requerida. ■

Así, parece oportuno adoptar una definición de sinonimia entre subconjuntos borrosos no tan amplia. La siguiente definición es la adoptada en [45].

Definición 5.3.3

— Un automorfismo θ de $L_{T,T^*}(\mathscr{F}(X))$ se dice que es un S-automorfismo si se verifica que $\theta(\mu)=\mu$ para todo $\mu\in\wp(X)$

— Un automorfismo θ de $L_{T,T^*}(\mathscr{F}(X))$ se dice que es un A-automorfismo si se verifica que θ_2 es un S-automorfismo y existe al menos un $\mu\in\wp(X)$ tal que $\theta(\mu)\neq\mu$.

Los S-automorfismos y los A-automorfismos serán los candidatos a representar sinónimos y antónimos respectivamente.

Definición 5.3.4

Dos subconjuntos borrosos $\mu,\eta\in\mathscr{F}(X)$ se dicen sinónimos (respectivamente antónimos) si existe un S-automorfismo (respectivamente un A-automorfismo) θ tal que

$$\theta(\mu)=\eta.$$

Con esta definición se mantiene una propiedad básica del fenómeno de la sinonimia: si μ es sinónimo (respectivamente antónimo) de η, entonces η es sinónimo (respectivamente antónimo) de μ, puesto que, como se comprueba fácilmente, el inverso de un S-automorfismo (respectivamente un A-automorfismo) es un S-automorfismo (respectivamente un A-automorfismo).

A pesar de ello, una propiedad importante queda fuera: el antónimo de un antónimo no es necesariamente un sinónimo. Con el fin de incluirla en el modelo se considera la siguiente definición.

Definición 5.3.5

Un subgrupo $G \subseteq Aut\, L_{T,T^*}(\mathscr{F}(X))$ se dice que es un SA-subgrupo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i) Cualquier elemento de G es o un S-automorfismo o un A-automorfismo,

ii) G contiene al menos un A-automorfismo y

iii) la composición de cualquier par de A-automorfismos es un S-automorfismo.

El siguiente teorema puede verse en [45].

Teorema 5.3.6

1. $\theta \in Aut\, L_{Min,Max}(\mathscr{F}(X))$ es un S-automorfismo si y sólo si

$$\theta(\mu)(x) = \theta_x(\mu(x))$$

con $\{\theta_x\}_{x \in X} \subset Aut\, L_{Min,Max}([0,1])$.

2. $\theta \in Aut\, L_{Min,Max}(\mathscr{F}(X))$ es un A-automorfismo si y sólo si

$$\theta(\mu)(x) = \theta_x(\mu(s(x)))$$

con s una biyección involutiva de X y distinta de la identidad y $\{\theta_x\}_{x \in X} \subset$ $Aut\, L_{Min,Max}([0,1])$.

3. Si G es un SA-subgrupo entonces es un producto semidirecto de los dos subgrupos siguientes:

$G_1 = \{\theta \in G : \theta(\mu)(x) = \theta_x(\mu(x))\}$ y

$G_2 = \{\theta \in G : \theta(\mu)(x) = \mu(s(x))\}$,

cumpliéndose además que G_2 tiene tan sólo dos elementos: la identidad y el dado por una biyección s con $s^2 = Id$ y $S \neq Id$.

Por consiguiente cuando se consideran la t-norma Min y la t-norma Max, los SA-subgrupos incluyen tan sólo un A-automorfismo distinto de la identidad, estando sin restringir el número de S-automorfismos.

Cuando se considera una t-norma T arquimediana estricta y su t-conorma dual se ha demostrado en la memoria que todo $\theta \in Aut\, L_{T,T_*}(\mathscr{F}(X))$ es de la forma:

$$\theta(\mu)(x) = \theta_x(\mu(s(x)))$$

con $\{\theta_x\}_{x \in X} \subset Aut\, L_{T,T_*}([0,1])$ y $s \in Biy(X)$. Como se ha visto en la sección 5.2, el grupo $Aut\, L_{T,T_*}([0,1])$ está compuesto únicamente por la identidad. Al ser el teorema 5.3.6 también válido para un par T, T^* en las condiciones expuestas, no existen, bajo la representación descrita, más sinónimos que la identidad, y un SA-subgrupo estaría formado, en este caso, únicamente por un A-automorfismo dado por una biyección de X involutiva.

Ejemplo 5.3.7

El siguiente ejemplo, a pesar de usar un universo no finito, puede mostrar la aparición de distintos subconjuntos borrosos antónimos. Consideremos la variable lingüística *altura* y el predicado *P=alto* representado sobre el universo $[0,3]$ mediante el subconjunto borroso

$$\mu_{alto}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ x-1 & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}.$$

La función $s_1 : [0,3] \to [0,3]$ dada por $s(x) = 3 - x$ es una biyección involutiva y se puede obtener un antónimo de μ_{alto} como:

$$\mu_{Ant\,alto}(x) = \mu_{alto}(s_1(x)) = \mu_{alto}(3-x) = \begin{cases} 0 & x \ge 2 \\ 2-x & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x \le 1 \end{cases}.$$

Si tomamos $s_2(x) = \sqrt{9 - x^2}$ disponemos de otra biyección sobre $[0,3]$ involutiva, obteniéndose en este caso:

$$\mu^*_{Ant\,alto}(x) = \mu_{alto}(\sqrt{9-x^2}) = \begin{cases} 0 & x \ge \sqrt{8} \\ \sqrt{9-x^2}-1 & \sqrt{5} \le x \le \sqrt{8} \\ 1 & x \le \sqrt{5} \end{cases}.$$

Conviene resaltar que mientras

$$\mu_{Ant\,alto}(x) = 1 - \mu_{alto}(x),$$

esto no sucede con $\mu^{*}_{Ant\,alto}$. En la siguiente figura puede verse los subconjuntos borrosos descritos.

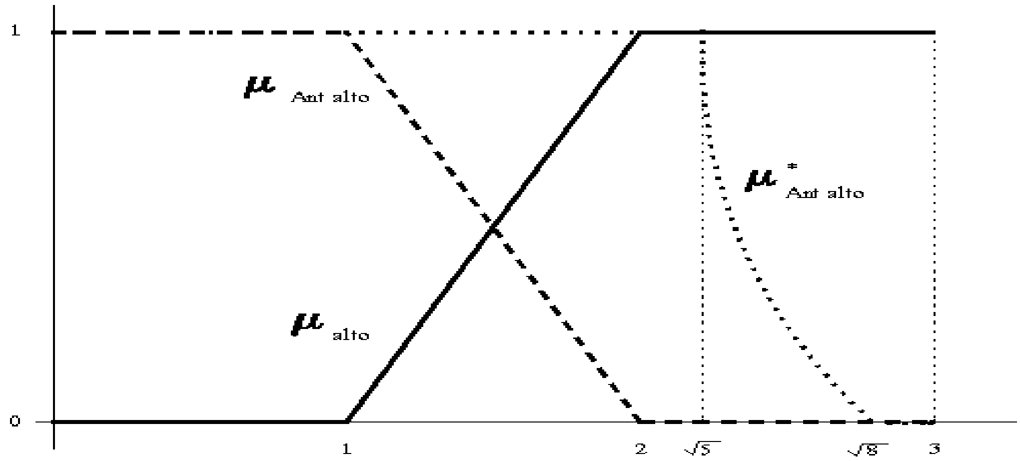


Figura 23. Ejemplos de subconjuntos borrosos antónimos de *alto*

CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

PARTE I

Capítulo 1.

En el Capítulo 1, una vez introducido el concepto de estado lógico, se muestran ejemplos de cálculo del conjunto de estados lógicos tanto para relaciones borrosas como clásicas. Muchas de estas relaciones se utilizan habitualmente como condicionales en modelos de razonamiento aproximado. No todas las relaciones clásicas tienen estados lógicos propios, como muestra el ejemplo del final de la sección 1.1.

En la sección 1.2.1 se estudia cuándo dos subconjuntos borrosos μ, η dan lugar al mismo preorden elemental, es decir, al mismo condicional material borroso. Se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que esto suceda, tanto en el caso de la t-norma Min como cuando la t-norma es arquimediana. Los resultados muestran que, en todos los casos, basta con que μ, η estén normalizados para que queden caracterizados por el preorden elemental que generan, al igual que en el caso clásico el condicional material determina unívocamente a los subconjuntos clásicos. De hecho, cuando la t-norma es arquimediana es suficiente con que los subconjuntos borrosos alcancen el valor cero, que algún punto «no esté» en ellos.

A partir de la relación de equivalencia

$$\mu \sim \eta \text{ si y sólo si } I_\mu^T = I_\eta^T,$$

definida en la sección 1.2.2, se obtiene un método para elegir un representante canónico de la clase de equivalencia. La elección de este representante justifica la utilización, en lo que se refiere a preórdenes elementales, de subconjuntos borrosos normalizados, salvo en el caso en el que dichos subconjuntos muestren un comportamiento asintótico. En particular, cuando el universo del discurso es finito, este comportamiento no puede aparecer y, por tanto, siempre es posible elegir un representante normalizado.

Por último en la sección 1.2.3 se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto borroso sea un estado lógico de un preorden elemental. Como característica fundamental resulta que el concepto de estado lógico mantiene la monotonía del subconjunto borroso a partir del cual se define el preorden elemental.

Las condiciones obtenidas en esta última sección permiten caracterizar cuándo dos subconjuntos borrosos están ordenados mediante el preorden

$$\mu \leq \eta \text{ si y sólo si } I_\mu^T \geq I_\eta^T .$$

Este preorden entre subconjuntos borrosos se convierte en un orden parcial pasando al conjunto cociente definido mediante la relación de equivalencia de la sección 1.2.2. Dicho orden restringido al conjunto $T(E,R)$, con R un preorden cualquiera, presenta siempre un elemento mínimo, formado por los subconjuntos borrosos constantes, y no tiene en general un elemento máximo, salvo cuando el preorden es elemental. Queda como problema abierto la existencia de elementos maximales de este orden, tanto en el caso de universos finitos como infinitos. Los elementos maximales del orden $\leq$ caracterizan a un preorden borroso. Cuando el preorden es una indistinguibilidad y el universo es finito, se han realizado estudios en los trabajos [34, 51]. También consideramos interesante el estudio de este orden parcial entre subconjuntos borrosos sobre la clase de todos ellos, $\mathscr{F}(X)$.

Capítulo 2

Este Capítulo comienza definiendo las clases de un preorden, para estudiar a continuación la relación entre las propiedades de las clases y las propiedades reflexiva y transitiva del preorden. Además, se demuestra que, para un preorden borroso, la clase μ_a es el estado lógico más pequeño de entre aquellos estados lógicos que están normalizados en a.

La utilización habitual en lógica borrosa de los subconjuntos borrosos lineales a trozos, tanto los números triangulares como los trapecios, ha hecho que se haya inves-

La utilización habitual en lógica borrosa de los subconjuntos borrosos lineales a trozos, tanto los números triangulares como los trapecios, ha hecho que se haya investigado una relación que tenga como clases a estos subconjuntos borrosos. En la sección 2.2 se obtiene que la W-indistinguibilidad

$$E(x,y) = Max(0, 1 - |f(x) - f(y)|) \tag{1}$$

permite obtener este tipo de subconjuntos borrosos cuando la función f tiene ciertas características.

En este capítulo básicamente consideramos dos problemas abiertos interesantes. En primer lugar, como se muestra en la memoria, una T-indistinguibilidad tiene asociada una métrica generalizada por lo que sería conveniente estudiar las propiedades de los entornos métricos, y de la topología inducida. En segundo lugar, es posible que la W-indistinguibilidad que aparece en (1) permita definir nuevas operaciones entre subconjuntos borrosos lineales a trozos, consiguiendo que los subconjuntos borrosos resultantes de dichas operaciones conserven esta propiedad.

Capítulo 3

El Capítulo 3 está dedicado a estudiar dos tipos de estados lógicos clásicos: los estados lógicos irreducibles y los minimales. Después de dar la definición de estado lógico irreducible como aquel que no se descompone en unión de otros distintos a él, se demuestra que estos estados lógicos caracterizan un preorden clásico. Por ende, los estados lógicos reducibles no son esenciales y pueden eliminarse del teorema de representación.

No obstante, también existen estados lógicos irreducibles que son superfluos y que pueden eliminarse del teorema de representación, estados lógicos que son intersección de otros estados lógicos. Este resultado nos ha llevado a considerar el estudio de los estados lógicos minimales y su definición se da en la sección 3.2. En la memoria se demuestra la equivalencia entre estos dos tipos de estados lógicos, cuando la relación es simétrica, y se obtienen caracterizaciones de los estados lógicos minimales que muestran una importante propiedad de los mismos: todos los elementos de un estado lógico minimal están conectados mediante cadenas de la relación del tipo

$$a \Rightarrow b_1 \Rightarrow b_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow b_n \Rightarrow b.$$

Los resultados obtenidos en este capítulo presentan dos aspectos interesantes:

1. *La generalización a estados lógicos borrosos de los conceptos aquí presentados*. Esta generalización podría mostrar una fuerte relación con el orden entre estados lógicos borrosos definido en la sección 1.2.3, debido a que los estados irreducibles caracterizan un preorden clásico mientras que los estados lógicos borrosos maximales de dicho orden caracterizan a los preórdenes borrosos. La equivalencia, para relaciones simétricas, entre estados lógicos irreducibles y minimales parece indicar que la obtención de subconjuntos borrosos maximales debe ser diferente cuando la relación es una indistinguibilidad de cuando es un preorden. Este hecho requiere, sin lugar a dudas, ser estudiado con más detalle.

2. *La conexión de estos dos conceptos con la monotonía de una relación respecto a una operación binaria* $\cdot$. Como se ha mostrado en [17] los estados lógicos permiten una caracterización de la monotonía de una relación cuando ésta es un preorden. Quizá un estudio con más profundidad de este hecho permita construir ejemplos de relaciones no monótonas que permitan modelizar distintos tipos de conocimiento que se caracterizan precisamente por su no monotonía.

PARTE II

Capítulo 4

En este capítulo hemos presentado un método de obtención de la función de pertenencia generalizada para algunos predicados borrosos o graduados. El método se basa en el conocimiento del uso del predicado mediante un sistema de reglas graduado, por la existencia de algunos elementos que son prototipos o antiprototipos del predicado, por la suposición de que el sistema de reglas puede ser modelizado mediante un preorden borroso y por la interpretación de los estados lógicos de este preorden. Se obtiene, entonces, una función de pertenencia «máster» del predicado que puede concretarse para caso particular.

A través del preorden asociado al sistema de reglas, y en el caso en el que dicho preorden es elemental, damos en la sección 4.4 dos métodos para asociar un conjunto de conectivas lógicas multivaluadas al predicado. En concreto, el primero permite considerar los predicados borrosos como magnitudes, es decir, como semigrupos sobre $[0,1]$ a través de la t-norma asociada al preorden elemental.

El segundo método utiliza un mecanismo propuesto por TARSKI para la generación en lógica clásica de las conectivas lógicas a partir de la implicación y del elemento mínimo del álgebra. Este método se estudia con un preorden elemental, obteniendo en el caso de las t-normas arquimedianas no estrictas un buen conjunto de conectivas multivaluadas.

Para finalizar el capítulo, se aplica el anterior método con las relaciones borrosas de Kleene-Dienes y de Reichenbach.

Como problemas abiertos destaquemos, en primer lugar, el estudio de la existencia o no de predicados que caigan fuera del método propuesto y que o bien carezcan de elementos distinguidos que actúen como prototipos o bien no se ajusten a un sistema de reglas que determine su comportamiento. En segundo lugar, también sería interesante estudiar cómo podría realizarse la síntesis de varias lógicas multivaluadas asociadas a dos o más predicados borrosos. Este camino ya fue iniciado en el trabajo [6].

Capítulo 5

En este capítulo se estudian los automorfismos sobre $\mathscr{F}(X)$, para un universo X finito y cuando la t-norma es arquimediana estricta, generalizando el trabajo realizado por OVCHINNIKOV en [45] para la t-norma Min. Los automorfismos pueden ser buenos candidatos para representar los antónimos y sinónimos en lógica borrosa. La caracterización de los automorfismos de $\mathscr{F}(X)$ mediante automorfismos sobre $[0,1]$ y biyecciones sobre X conduce de forma natural a estudiar los automorfismos sobre $[0,1]$. En la memoria se obtiene que para las t-normas arquimedianas, tanto positivas como no positivas, únicamente existe el automorfismo identidad. Esta situación es muy diferente a cuando se considera la t-norma Min, ya que para ésta cualquier biyección monótona sobre $[0,1]$ es un automorfismo. De esta forma la representación de antónimos y sinónimos da lugar a situaciones diferentes cuando se considera la pareja (Min, Max) que cuando se considera una pareja (T, T^*) dual y con T arquimediana. De hecho, como se muestra en la última sección del capítulo, en este último caso sólo es posible hablar de antónimos, de acuerdo siempre al modelo propuesto.

Un importante problema que ha quedado abierto en este capítulo consiste en determinar si los automorfismos sobre $\mathscr{F}(X)$, cuando se considera una t-norma arquimediana no positiva como la de Lukasiewicz, conservan subconjuntos clásicos o bien, si no lo hacen, encontrar un contraejemplo, lo que permitiría extender los resultados obtenidos a este tipo de t-normas.

APÉNDICE

Presentamos en este apéndice las definiciones y propiedades básicas de las t-normas y t-conormas, junto a las de preórdenes e indistinguibilidades, con el objeto de hacer, en la medida de lo posible, autocontenida la memoria.

1. NORMAS TRIANGULARES

Definición 1.1.

Una norma triangular T es una operación $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ que verifica las siguientes propiedades:

— Asociatividad: $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$,
— Conmutatividad: $T(x,y) = T(y,x)$,
— Monotonía: si $x \leq x'$ e $y \leq y'$ entonces $T(x,y) \leq T(x',y')$,
— Condiciones de contorno: $T(x,1) = x$ y $T(x,0) = 0$.

La denominación de normas triangulares proviene de K. Menger [39], y se abrevian habitualmente como t-normas (*vid.* B. Schweizer, y A. Sklar [54]).

Algunos ejemplos de t-normas son:

— **La t-norma Z.** Se define como,

$$Z(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } y = 1 \\ y, & \text{si } x = 1 \\ 0, & \text{si } x \neq 1, y \neq 1 \end{cases}.$$

— **La t-norma Min.** Definida como el mínimo de dos números,

$$Min(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq y \\ y, & \text{si } x > y \end{cases}.$$

— **La t-norma Producto.** Definida como el producto de dos números,

$$\Pi(x,y) = x \cdot y.$$

— **La t-norma de Lukasiewicz.** Definida como,

$$W(x,y) = Max(0, x + y - 1).$$

Por las propiedades de contorno y de monotonía es fácil de ver que se verifica, para cualquier t-norma T,

$$Z \leq T \leq Min.$$

Una t-norma es continua si lo es como función de dos variables. La t-norma Z no es continua y en cambio Min, Π, W si lo son. En la presente memoria tan sólo consideramos t-normas continuas.

Definición 1.2.

Una t-norma T es arquimediana si es continua y se verifica para todo $x \in (0,1)$ que

$$T(x,x) < x.$$

El siguiente teorema [1,36] es una importante caracterización de las t-normas arquimedianas,

Teorema 1.3.

Una t-norma T es arquimediana si y sólo si admite una representación de la forma

$$T(x,y) = h^{(-1)}(h(x) + h(y))$$

donde $h:[0,1] \to \mathbb{R}^+$ es una función continua, estrictamente decreciente y tal que $h(1) = 0$. La función $h^{(-1)}: \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ es la pseudoinversa de h, dada por:

$$h^{(-1)}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } x \geq h(0) \\ h^{-1}(x), & \text{si } x \in [0,h(0)] \end{array} \right\} = h^{-1}(Min(h(0),x)\,.$$

A la función h se le denomina generador aditivo de la t-norma T y es única salvo la multiplicación por una constante positiva. La t-norma Min no es arquimediana, pero las t-normas Π, W si lo son. Π está generada por $h_{\Pi}(x) = -\ln x$ y W por $h_W(x) = 1 - x$.

Definición 1.4.

Una t-norma T es estricta si es continua y estrictamente creciente en cada variable en $(0,1]^2$.

La t-norma Π es estricta pero W no lo es. Para las t-normas arquimedianas se verifica que son estrictas si y sólo si su generador aditivo verifica $f(0) = \infty$.

Definición 1.5.

Una t-norma T es positiva si $T(x,y)>0$ para todo $x,y \in (0,1]$.

Las únicas t-normas continuas positivas son Min y las estrictas.

La importancia de las t-normas Min, Π, W que hemos puesto por ejemplo queda reflejada en los siguientes resultados.

Definición 1.6.

Dos t-normas T, T' son isomorfas si y sólo si existe una biyección $\theta: [0,1] \to [0,1]$ tal que para todo $x,y \in [0,1]$ se verifica que

$$\theta(T(x,y)) = T'(\theta(x),\theta(y)).$$

Teorema 1.7.

Las únicas t-normas continuas son:

— la t-norma Min,
— las arquimedianas estrictas que son isomorfas a la t-norma producto Π,
— las arquimedianas no estrictas, isomorfas a la t-norma de Lukasiewicz, W y
— las t-normas que son suma ordinal de t-normas arquimedianas y la t-norma Min.

A la vista de este resultado, las t-normas continuas se reducen a estudiar las t-normas Min, Π, y W. Las t-normas del apartado 4 del teorema son t-normas continuas dadas por «trozos» donde se comportan como el mínimo o como alguna t-norma arquimediana. Para más detalles puede consultarse [54].

2. PREÓRDENES E INDISTINGUIBILIDADES

Definición 2.1.

Dada una t-norma T, se define la pseudoinversa I^T como

$$I^T(y/x) = sup\{z \in [0,1] : T(x,z) \leq y\}.$$

Las pseudoinversas de las t-normas Min, Π, W son:

— $I^{Min}(y/x) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ y & \text{e.o.c.} \end{cases}$,

— $I^{\Pi}(y/x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ Min(1, \frac{y}{x}) & \text{e.o.c.} \end{cases}$,

— $I^{W}(y/x) = Min(1, 1 - x + y)$.

Cuando la pseudoinversa se define a partir de una t-norma continua por la izquierda en su segunda componente, presenta muchas propiedades interesantes, alguna de las cuales son:

1. $T(x, I^T(y/x)) \leq y$

2. $I^T(y/x) = 1$ si y sólo si $x \leq y$ (incluye reflexividad)

3. $T(I^T(y/x), I^T(z/y)) \leq I^T(z/x)$ (transitividad)

4. $I^T(I^T(z/y), x) = I^T(I^T(z/x), y)$ (propiedad de intercambio)

5. I^T es monótona en el segundo argumento ($I^T(\cdot/x)$)

6. I^T es antimonótona en el primer argumento ($I^T(y/\cdot)$)

7. $I^T(y/1) = y$ (principio de neutralidad)

La pseudoinversa de una t-norma T es un T-preorden. Se denomina T-preorden elemental generado por un subconjunto borroso μ a

$$I_{\mu}^{T}(y/x) = sup\{z \in [0,1] : T(\mu x, z) \leq \mu y\}.$$

Se verifica el siguiente teorema de representación [86, 90]:

Teorema 2.2.

Una relación borrosa $R:X\to[0,1]$ es un T-preorden si y sólo si existe una familia de F de subconjuntos borrosos μ tal que:

$$R(y/x)=\inf_{\mu\in F} I_{\mu}^{T}(y/x).$$

Como se ha visto en la memoria, (teorema 1.1.7, página 28) el conjunto de estados lógicos de R es el mayor conjunto con el que se verifica el teorema de representación.

Definición 2.3.

Una relación borrosa $E:X\to[0,1]$ se dice que es una T-indistinguibilidad si y sólo si

— E es un T-preorden,
— E es simétrica, $E(x,y)=E(y,x)$.

Al igual que para los T-preórdenes, las indistinguibilidades admiten el siguiente teorema de representación.

Teorema 2.4.

Una relación borrosa $E:X\to[0,1]$ es un T-indistinguibilidad si y sólo si existe una familia de F de subconjuntos borrosos μ tal que:

$$E(y/x) = \inf_{\mu \in F} Min(I_\mu^T(y/x), I_\mu^T(x/y)).$$

3. CONORMAS TRIANGULARES

Definición 3.1.

Una conorma triangular T^* es una operación $T^*:[0,1]^2 \to [0,1]$ que verifica las siguientes propiedades:

— asociatividad: $T^*(x, T^*(y,z)) = T^*(T^*(x,y),z)$,
— conmutatividad: $T^*(x,y) = T^*(y,x)$,
— monotonía: Si $x \leq x'$ e $y \leq y'$ entonces $T^*(x,y) \leq T^*(x',y')$,
— condiciones de contorno: $T^*(x,0) = x$ y $T^*(x,1) = 1$.

Las conormas triangulares se suelen abreviar por t-conormas y son un concepto dual al de t-normas en el sentido del siguiente teorema:

Teorema 3.2.

T^* es una t-conorma si y sólo si T, definida por

$$T(x,y) = 1 - T^*(1-x, 1-y)$$

es una t-norma.

Así para cada t-norma tenemos asociada una t-conorma, por ejemplo las t-conormas asociadas a las t-normas Z, Min, Π, W son:

— **La t-conorma Z^*.** Se define como,

$$Z(x,y)=\begin{cases} x, & \text{si } y=0 \\ y, & \text{si } x=0 \\ 1, & \text{si } x\neq 0, y\neq 0 \end{cases},$$

— **La t-conorma Max.** $Min^*(x,y)=Max(x,y)$,

— **La t-conorma Suma probabilística.** $\Pi^*(x,y)=x+y-x\cdot y$,

— **La t-conorma de Lukasiewicz.** $W^*(x,y)=Min(1,x+y)$.

Por las propiedades de contorno y de monotonía es fácil de ver que se verifica, para cualquier t-conorma T^*,

$$Max\leq T^*\leq Z^*$$

Una t-conorma es continua si lo es su t-norma asociada.

Definición 3.3.

— Una t-conorma S es arquimediana si su t-norma asociada lo es. De la misma forma una t-conorma se dice estricta si es estricta su t-norma asociada.

— Una t-conorma S es positiva si su t-norma dual asociada lo es.

Los teoremas de representación para t-normas se verifican también para t-conormas,

Teorema 3.4.

Una t-conorma T^* es arquimediana si y sólo si admite una representación de la forma

$$T^*(x,y)=g^{(-1)}(g(x)+g(y)),$$

donde $g:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ es una función continua, estrictamente creciente y tal que $g(0)=0$, y $g^{(-1)}:\mathbb{R}+\to[0,1]$ es la pseudoinversa de g.

A la función g se le denomina generador aditivo de la t-conorma T^*, y es única salvo la multiplicación por una constante positiva. Una t-conorma arquimediana es estricta si y sólo si su generador aditivo verifica que $g(1)=\infty$. Entonces la pseudo-inversa coincide con la inversa de g, $g^{(-1)}=g^{-1}$. Como es lógico por dualidad, la t-conorma Max es continua y no arquimediana, y las t-conormas Π^*, W^* son arquimedianas siendo la primera estricta. Las t-normas Max y las estrictas son positivas.

Al igual que sucedía con las t-normas, las t-conormas Max, Π^*, W^*, son especialmente importantes por representar a todas las t-conormas continuas.

Definición 3.5.

Dos t-conormas T_1^*, T_2^* son isomorfas si y sólo si lo son sus t-normas asociadas.

Teorema 3.6.

— Toda t-conorma arquimediana estricta es isomorfa a la t-conorma suma probabilística Π^*,

— toda t-conorma arquimediana no estricta es isomorfa a la t-conorma de Lukasiewicz, W^*,

— toda t-conorma continua es suma ordinal [54] de t-conormas arquimedianas y la t-conorma Max.

4. TERNAS DE DE MORGAN

La relación dual entre t-normas y t-conormas se establece mediante la función $N(x)=1-x$, esto se puede generalizar mediante las funciones de negación.

Definición 4.1.

Una negación fuerte es una biyección $N:[0,1]\to[0,1]$ decreciente, continua e idempotente.

En [60] puede verse el siguiente teorema de representación para las funciones de negación fuertes.

Teorema 4.2.

Una función $N:[0,1]\to[0,1]$ es una negación fuerte si y sólo si existe una función t de $[0,1]$ en $[0,+\infty]$ creciente, con $t(0)=0$ y cumpliéndose:

$$N(x)=t^{-1}(t(1)-t(x)).$$

para todo $x\in[0,1]$.

La función t se denomina generador aditivo de la negación N y es único salvo un factor multiplicativo positivo.

Definición 4.3.

Una terna de De Morgan es una terna (T,T^*,N) donde T es una t-norma, T^* es una t-conorma y N es una función de negación fuerte, verificando

$$T(x,y)=N(T^*(N(x),N(y))).$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] ACZÉL, J. (1966) *Lectures on Functional Equations and their Applications.* Academic Press, New York.

[2] ACZÉL, J. (1994) «*Comunicación personal*».

[3] ALSINA, C. (1983) *A primer of t-norms.* Proc. FISAL-83, Univ. Palma de Mallorca, 27-36.

[4] ALSINA, C. (1988) *On a Functional Equation Characterizing two Binary Operations on the Space of Membership Functions.* Fuzzy Sets and Systems 27, Nº 1, 5-9.

[5] ALSINA, C.; CASTRO, J.L.; TRILLAS, E. *On the Characcterization of S and R Implications.* Comunicación enviada al Congreso IFSA'95, Brasil.

[6] ALSINA, C.; TRILLAS, E. (1992) *Synthesizing Implications.* International Journal of Intelligent Systems, Vol. 7, nº 8, 705-713.

[7] ALSINA, C.; TRILLAS, E.; VALVERDE, L. (1983) *On some Logical Connectives for Fuzzy Sets Theory.* Journal Math. Anal. Appl. 93, 15-26.

[8] BALDWIN, J.F.; PILSWORTH, B.W. (1980) *Axiomatic Approach to Implication for Approximate Reasoning with Fuzzy Logic.* Fuzzy Sets and Systems 3, 193-220.

[9] BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. (1977) *Local and Fuzzy Logics.* Fifth Int. Sym. on Multiple-Valued Logic, Indiana University. Publicado en Modern Uses of Multiple-Valued Logic, Vol. 2. Dunn, J. M. y Epstein, G. Eds. Reidel, Dordrecht, Holland.

[10] BIRKHOFF, G. (1979) *Lattice Theory.* American Mathematical Society, Colloquium Publications. 3º Edición.

[11] BOUCHON-MEUNIER, B.; JIA, Y. (1992) *Linguistic Modifiers and Imprecise Categories.* Int. Journal of Intelligent Systems, Vol. 7, 25-36.

[12] CASTRO, J.L. (1991) *Contribución al estudio de modelos matemáticos para la Inteligencia Artificial.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

[13] CASTRO, J.L.; DELGADO, M.; TRILLAS, E. (1994) *Inducing Implication Relations.* Int. Journal of Approximate Reasoning 10, 235-250.

[14] CASTRO, J.L.; TRILLAS, E. (1989) *Sobre Preórdenes y Operadores de Consecuencia de Tarski.* Theoria 11, 419-425.

[15] CASTRO, J.L.; TRILLAS, E. (1990) *Logic and Fuzzy Relations.* Approximate Reasoning Tools for Artificial Intelligence, Eds. J.L. Verdegay y M. Delgado, Verlag TUV Rheinland, 3-20.

[16] CHAKRABORTY, M. K. (1988) *Use of Fuzzy Set Theory in Introducing Graded Consequence in Multiple Valued Logic.* Fuzzy Logic in Knowledge-Based Systems, Decision and Control, 247-257. North-Holland.

[17] CUBILLO, S. (1993) *Contribución al estudio de la lógica y de los condicionales borrosos.* Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid.

[18] DE FINETTI, B. (1993) *Theory of Probability, Vol. 1 and 2.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[19] DUBOIS, D.; LANG, J.; PRADE, H. (1991) *Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 2: Logical approaches.* Fuzzy Sets and Systems 40, 203-244.

[20] DUBOIS, D.; PRADE, H. (1980) *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Academic Press, Nueva York.

[21] DUBOIS, D.; PRADE, H. (1988) *An Introduction to Possibilistic and Fuzzy Logics.* Non-standard Logics for Automated Reasoning, P. Smets et al. (Eds.). Academic Press, New York, 287-326.

[22] DUBOIS, D.; PRADE, H. (1991) *Fuzzy Sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions.* Fuzzy Sets and Systems 40, 143-202.

[23] DUBOIS, D.; PRADE, H.; YAGER, R.R., Eds. (1993) *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems.* Morgan Kaufmann Pub. Inc., San Mateo California.

[24] EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. (1984) *Mathematical Logic.* Springer-Verlag, New York.

[25] ESTEVA, F. (1975) *Negaciones en retículos completos.* Stochastica I, 49-66.

[26] ESTEVA, F. (1981) *Negaciones en la teoría de conjuntos difusos.* Stochastica V, 1, 33-44.

[27] FODOR, J. C. (1993) *A new look at fuzzy connectives.* Fuzzy Sets and Systems 57, 141-148.

[28] GILES, R. (1988) *The Concept of Grade of Membership.* Fuzzy Sets and Systems 25, 297-323.

[29] GINSBERG, M.L. (1987) *Readings in Nonmonotonic Reasoning.* Morgan Kaufmann, Los Altos, California.

[30] GODO, L. (1990) *Contribució a l'estudi de models d'inferència en els sistemes possibilístics.* Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya.

[31] GOLOTA, Y. Y. (1992) *On a certain formalization of antonyms logic.* Fuzzy Sets and Systems 45, 335-340.

[32] HAILPERIN, T. (1986) *Boole's Logic and Probability. 2nd Edition.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 85, North-Holland, Amsterdam.

[33] HARDY, G.; LITTLEWOOD, J.E.; PÓLYA, G. (1988) *Inequalities. 2nd Edition.* Cambridge Mathematical Library.

[34] JACAS, J. (1987) *Contribució a l'estudi de les relacions d'indistingibilitat i a les seves aplicacions als processos de classificació.* Tesi Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya.

[35] LÉA SOMBÉ (1980) *Reasoning under Incomplete Information in Artificial Intelligence.* Special Issue of Inter. Jour. of Intelligent Systems 5, nº 4.

[36] LING, C. H. (1965) *Representation of associative functions.* Publ. Math. Debrecen 12, 182-212.

[37] LÓPEZ DE MÁNTARAS, R. (1990) *Approximate Reasoning Models.* Ellis Horwood, Londres.

[38] MAYOR, G. (1984) *Contribució a l'estudi de models matemàtics per a la lògica de la vaguetat.* Tesis Doctoral, Universitat de les Illes Balears.

[39] MENGER, K. (1942) *Statistical Metrics.* Proc. Nat. Acad. Science USA, 28 535-537.

[40] MENGER, K. (1951) *Probabilistic Theory of Relations*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, 178-180.

[41] MOZIR, N.N. (1994) *Properties and Characterizations of the Residuation Implications of Triangular Norms.* International Journal of Approximate Reasoning, aceptado para publicar.

[42] NILSSON, N.J. (1986) *Probabilistic Logic.* Artificial Intelligence 28, 71-88.

[43] NGUYEN, H.T.; GOODMAN, I.R. (1993) *On Modeling of If-Then Rules for Probabilistic Inference.* Int. Journal of Intelligent Systems, Vol. 9, 411-418.

[44] NORWICH, A. M.; TURKSEN, I. B. (1984) *A Model for the Measurement of Membership and the Consequences of this Empirical Implementation.* Fuzzy Sets and Systems 12, 1-25.

[45] OVCHINNIKOV, S. V. (1981) *Representations of Synonymy and Antonymy by Automorphisms in Fuzzy Set Theory.* Stochastica Vol. V, nº 2, 95-107

[46] OVCHINNIKOV, S. V. (1984) *Representations of Transitive Fuzzy Relations.* En H. Skala, S. Termini, E. Trillas, Eds., Aspects of Vagueness, 105-118, Reidel, Dordrecht.

[47] PAVELKA, J. (1979) *On Fuzzy Logic I, II, and III.* Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd. 25, 45-52; 25, 119-134; 25, 447-464.

[48] PEARL, J. (1988) *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference.* Morgan Kaufmann, California.

[49] PIERA, N. (1983) *Morphisms and Synonymy.* Proc. FISAL-83, 101-109. Palma de Mallorca.

[50] RASIOWA, H. (1974) *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics.* North Holland, Amsterdam.

[51] RECASENS, J. (1991) *Sobre la representació i generació de relacions d'indistingibilitat.* Tesi Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya.

[52] RUSPINI, E. H. (1982) *Recent Development in Fuzzy Clustering.* Fuzzy Sets and Possibility Theory (Ed. R. Yager), 147-153, Pergamon Press.

[53] SCHWARTZ, D. G. (1991) *A System for Reasoning with Imprecise Linguistic Information.* International Journal of Approximate Reasoning 5, 463-488.

[54] SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. (1983) *Probabilistic Metric Spaces.* North-Holland, New York.

[55] SMETS, P.; MAMDANI, E. H.; DUBOIS, D.; PRADE, H. Eds. (1988) *Non-Standard Logics for Automated Reasoning.* Academic Press, Londres.

[56] TARSKI, A. (1983) *Logic, semantics, Metamathematics.* 2º Edición Hackett Publishing Company, Inc., Indiana, USA.

[57] TARSKI, A. (1985) *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas.* Espasa-Calpe, Madrid.

[58] TERRICABRAS, J.M., TRILLAS, E. (1989) *Some Remarks on Vague Predicates.* Theoria, 10, 1-12.

[59] TOMAS, M.S. (1988) *Sobre t-normes racionals i negacions.* Actes IV Congrés Català de Lògica, 119-121.

[60] TRILLAS, E. (1979) *Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos.* Stochastica, III-1, 47-60.

[61] TRILLAS, E. (1980) *Conjuntos Borrosos.* Vicens-Vives, Barcelona.

[62] TRILLAS, E. (1982) *Assaig sobre relacions d'indistingibilitat.* Actes del Primer Congrés Catalá de Lógica Matemática, 51-59. Barcelona.

[63] TRILLAS, E.; (1983) *Aproximació a una Anàlisi Lògico-Matemàtica 'ingènua' de la Sinonímia.* Proc. II Congrés Català de Lògica Matemàtica.

[64] TRILLAS, E. (1988) *Relational Probabilities on Intuitionistic Lattices.* Stochastica XII, 2-3, 85-102.

[65] TRILLAS, E. (1992) *Introducción breve al Razonamiento No monótono.* Inteligencia Artificial (Fundamentos Teóricos y aplicaciones), Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 153-169.

[66] TRILLAS, E. (1992) *On Exact and Inexact Conditionals.* Proceedings IPMU'92, 649-655.

[67] TRILLAS, E. (1992) *On Exact Conditionals.* Stochastica, Vol. XIII, 1, 137-143.

[68] TRILLAS, E. (1992) *Theories of fuzziness and its control.* Aspects of Scientific Cooperation on Information Technology. Fumari, M.; Massarotti, A.; Tamburrini, G.; Termini, S. Eds., 55-76.

[69] TRILLAS, E. (1993) *Apunte sobre la Indistinguibilidad.* Theoria-Segunda Época, Vol. VIII, nº 19, 23-49.

[70] TRILLAS, E. (1993) *On Logic and Fuzzy Logic.* International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol. 1, Nº 2 107-137.

[71] TRILLAS, E. (1993) *On Fuzzy Conditionals Generalising the Material Conditional.* Uncertainty and Information Processing, Ed. B. Bouchon-Meunier, Springer-Verlag.

[72] TRILLAS, E.; ALSINA, C. (1978) *Introducción a los espacios métricos generalizados.* Serie Universitaria, nº 49 (Fundación Juan March), Madrid.

[73] TRILLAS, E.; ALSINA, C. (1992) *Some Remarks on Approximate Entailment.* International Journal of Approximate Reasoning (6), 525-533.

[74] TRILLAS, E.; ALSINA, C. (1993) *Logic: going farther from Tarski?.* Fuzzy Sets and Systems 53, 1-13.

[75] TRILLAS, E.; ALSINA, C.; TERRICABRAS, J.M. (1995) *Introducción a la lógica borrosa.* Ariel Matemática, Barcelona.

[76] TRILLAS, E.; CUBILLO, S. (1993) *Fuzzy Conditionals on a Product Universe.* Proceedings Second Inter. Conference on Fuzzy Systems, 924-927. San Francisco.

[77] TRILLAS, E.; CUBILLO, S.; RODRÍGUEZ, A. (1993) *Preórdenes borrosos, indistinguibilidades y estados lógicos borrosos.* Actas III Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, 57-64. Santiago de Compostela.

[78] TRILLAS, E.; CUBILLO, S.; RODRÍGUEZ, A. (1994) *An Essay on Name and Extension of Rule-Given Properties.* IPMU'94, 571-576. Paris.

[79] TRILLAS, E.; CUBILLO, S.; RODRÍGUEZ, A. (1994) *Sobre la identidad de condicionales materiales.* Actas IV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, 75-77. Blanes.

[80] TRILLAS, E.; GUTIERREZ, J., Eds. (1992) *Aplicaciones de la Lógica Borrosa.* C.S.I.C.

[81] TRILLAS, E.; SOBRINO, A. (1990) *Primeros conceptos lógicos (expresados de una forma bastante general).* Agora, 9. Universidad de Santiago de Compostela.

[82] TRILLAS, E.; RIERA, T. (1981) *Towards a Representation of Synonyms and Antonyms by Fuzzy Sets.* BUSEFAL 5, 30-45.

[83] TRILLAS, E.; RODRÍGUEZ, A.; CUBILLO, S. (1994) *Ovchinnikov's Automorphisms Revisited.* Mathware & Soft Computing 1, 83-92.

[84] TRILLAS, E.; RODRÍGUEZ, A.; CUBILLO, S. (1994) *Are Indistinguishabilities always coming from Preorders?.* Proc. 3rd International Conference on Fuzzy Logic, Neural Nets and Soft Computing, 497-498. Iizuka, Japón.

[85] TRILLAS, E.; VALVERDE, L. (1984) *An Inquiry into Indistinguishability Operators.* Aspects of Vagueness, Eds. Skala-Termini-Trillas, Reidel, 231-256.

[86] TRILLAS, E.; VALVERDE, L. (1985) *On Implication and Indistinguishability in the setting of Fuzzy Logic.* Management Decision Support Systems using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Eds. J. kacprzyk, R.R. Yager, Verkag TUV, 198-212.

[87] TRILLAS, E.; VALVERDE, L. (1985) *On Modus Ponens in Fuzzy Logic.* Proc. XV Inter. Symp. Multiple-valued Logic, IEEE, 294-301.

[88] TRILLAS, E.; VALVERDE, L. (1985) *On Mode and Implication in Approximate Reasoning.* Approximate Reasoning in Expert Systems 157-166, M.M. Gupta et al. (eds.), North Holland, Amsterdam.

[89] TRILLAS, E.; VALVERDE, L. (1987) *On Inference in Fuzzy Logic.* Proc. Second IFSA Congress, Tokyo.

[90] VALVERDE, L. (1985) *On the structure of F-Indistinguishability operators.* Fuzzy Sets and Systems 17, 313-328.

[91] WEBER, S. (1983) *A General Concept of Fuzzy Connectives, Negations and Implications based on t-norms and t-conorms.* Fuzzy Sets and Systems 11, 115-134.

[92] YAGER, R.R. (1980) *On a General Class of Fuzzy Connectives.* Fuzzy Sets and Systems 4, 235-242.

[93] ZADEH, L. A. (1965) *Fuzzy Sets.* Information and Control 8, 338-353.

[94] ZADEH, L. A. (1973) *Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Process.* IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, SMC-3, 28-44.

[95] ZADEH, L. A. (1975) *Fuzzy Logic and Approximate Reasoning.* Synthese 30, 407-428.

[96] ZADEH, L. A. (1975) *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. Part 1, 2 and 3.* Information Sciences 8, 199-249; 8, 301-357; 9, 43-80.

[97] ZADEH, L. A. (1979) *A Theory of Approximate Reasoning.* Machine Intelligence 9, 149-194.

[98] ZADEH, L. A. (1983) *The Role of Fuzzy Logic in the Management of Uncertainty in Expert Systems.* Fuzzy Sets and Systems 11, 199-228.

[99] ZADEH, L. A. (1987) *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L. A. Zadeh*. Editado por R.R. Yager, et al.. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[100] ZHANG, L. (1993) *Structural and Functional Quantization of Vagueness.* Fuzzy Sets and Systems, 55, 51-60.

[101] ZYSNO, P. (1981) *Modeling Membership Functions.* B. B. Rieger (Eds.), Empirical Semantics I, Brockmeyer, Bochum, 350-375.